Exponentielles Wachstum – Exponentialfunktionen

Bakterienkultur

Wir untersuchen eine Kultur, deren Bakterienzahl sich in jeder Stunde verdoppelt.
Unser Ziel ist es, vorauszusagen, welche Größe eine Kultur nach einer gegebenen Zeit *t* hat.

Um das Wachstum rechnerisch in den Griff zu bekommen, überlegen wir uns, wie diese Zahlen zustande kommen:

Zeit	**Anzahl der Bakterien**	**Formel für die Anzahl der Bakterien**
Zu Beginn	1000	$1000 * 2^0$
Nach 1 Stunde	2000	$1000 * 2^1$
Nach 2 Stunden	4000	$1000 * 2^2$
Nach 3 Stunden	8000	$1000 * 2^3$
Nach 4 Stunden	16 000	
Nach 5 Stunden		
Nach 6 Stunden		
Nach t Stunden		

Ergänzen Sie die Tabelle und ermitteln Sie die Funktionsgleichung zur Berechnung der Anzahl der Bakterien nach einer beliebigen Zeit t.

f(t) = ...

Lotusblume

In einem alten Lehrbuch ist die Rede von einer ganz besonderen Lotusblume. Sie wird in einen Teich gesetzt und wächst darin so rasch, dass sie am folgenden Tag jeweils eine doppelt so große Fläche bedeckt wie am Vortag. Nach 10 Tagen ist der Teich völlig zugewachsen. Der Leser wird nun gefragt, nach wie vielen Tagen der Teich zugewachsen wäre, wenn man gleichzeitig zwei dieser sagenhaften Lotusblumen eingebracht hätte.

Betrachten wir nun eine derartige Lotusblume, von der wir annehmen wollen, dass sie vor langer Zeit in den Teich eingesetzt wurde. Zum Zeitpunkt des Beginns unserer Beobachtung bedeckte sie gerade eine Fläche von 1 m^2.

Beschreiben Sie das Wachstum der Lotusblume mit Hilfe einer geeigneten Funktionsgleichung. Hilfreich sind Wertetabelle und Skizze.

Da das Wachstum der Lotuspflanze nicht sprunghaft erfolgt, sondern stetig vor sich geht, kann man den Definitionsbereich von Z auf Q erweitern. Eine Erweiterung des Definitionsbereiches von Q auf R führt zu folgender

Definition: Eine Funktion f mit $f(x) = a^x$, $x \in R$, $a \in R^{>0}$ heißt **Exponentialfunktion.**

Aufgaben:

1. Stellen Sie eine Wertetabelle für die Funktionen f und g mit $f(x) = 3^x$ und $g(x) = 3^{-x}$, $x \in R$ auf und skizzieren Sie beide Graphen.

2. Sie wollen 1000 € für einen längeren Zeitraum bei der Bank anlegen. Es wird Ihnen ein Zinssatz von 5,6 % zugesagt. Sie berechnen, auf welchen Betrag Ihr Kapital nach 1, 2, 3, 4, 5 Jahren angewachsen ist, wenn Sie zwischenzeitlich nichts abheben. Können Sie angeben, auf welchen Betrag Ihr Kapital nach 20 oder 25 Jahren angewachsen ist?

3. Ein Anfangskapital K_0 wächst bei einem jährlichen Zinssatz von p % in n Jahren auf den Betrag $K_n = K_0 * (1 + \frac{p}{100})^n$, wenn man die Zinsen zwischenzeitlich nicht abhebt. Berechnen Sie K_n bei einem Anfangskapital von 3000 € und einem Zinssatz von 7,5 % für n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 und stellen Sie die Zuordnung $n \to K_n$ graphisch dar.

4. Die von einer Bakterienkultur belegte Fläche wächst exponentiell und beträgt zu Beginn 20 cm^2. Innerhalb einer Minute wächst sie **um** 4%.

   - *Lösung: Ermittlung der Exponentialfunktion*

   Das bedeutet, dass sie während einer Minute **auf** 104% ihrer ursprünglichen Größe, d.h. um den Faktor 1.04 anwächst. Nach derselben Logik wie im obigen Bakterienbeispiel ist die Fläche nach *t* Minuten durch 20×1.04^t cm^2 gegeben. (Machen Sie die Probe, indem Sie *t* = 1 einsetzen: Nach einer Minute wird eine Fläche von 20×1.04 cm^2 vorausgesagt, was mit der Angabe übereinstimmt).

5. Die Seerosen auf der Oberfläche eines Teichs vermehren sich exponentiell. Zu Beginn sind 17 Stück vorhanden. Alle 4 Tage verdoppelt sich ihre Anzahl.

   - *Lösung: Ermittlung der Exponentialfunktion*

   Nach *x* 4-Tages-Perioden beträgt ihre Anzahl 17×2^x. Da in dieser Zeit $t = 4x$ Tage vergehen, ist die Zahl der Seerosen nach *t* Tagen durch $17 \times 2^{t/4}$ gegeben. (Machen Sie die Probe, indem Sie *t* = 4 einsetzen: Nach 4 Tagen wird eine Anzahl von 17×2 vorausgesagt, was mit der Angabe übereinstimmt).

6. Beschreiben Sie Eigenschaften der Exponentialfunktionen f mit $f(x) = a^x$, $x \in R$ und $a \in R^{>0}$, indem Sie folgende Aspekte untersuchen:
   - Wertebereich
   - Gemeinsame Punkte
   - Monotonieverhalten
   - Graphen von a^x im Vergleich zu $(\frac{1}{a})^x$
   - $f(x_1+x_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$