Einführung in die Analytische Geometrie

Was bedeutet „Analytische Geometrie“?

Geometrische Objekte werden algebraisch beschrieben und dadurch lassen sich geometrische Probleme lösen. Diese Möglichkeit wurde von Descartes (1596-1650) entwickelt. Zum Beispiel arbeiteten die „alten Griechen“ an dem Problem, geometrisch (nur mit Zirkel und Lineal) eine Verdopplung eines Würfels zu erreichen. Erst durch die Nutzung algebraischer Methoden ließ sich zeigen, dass dieses Problem geometrisch nicht zu lösen ist, denn die Kantenlänge des verdoppelten Würfels müsste $\sqrt[3]{2}$ sein, wenn der Ausgangswürfel die Kantenlänge 1 hätte und dieser kann nur mit Hilfe von Lineal und Zirkel nicht konstruiert werden.

Was ist ein Vektor?

Ein Vektor ist ein abstraktes Objekt, dem eine *Länge* und eine *Richtung* zugeordnet ist.
Bsp: Standortveränderung, Verschiebung, Geschwindigkeit, Kraft, Beschleunigung
Vektoren können im Koordinatensystem durch Spaltentripel (im R^3) dargestellt werden.

<u>Aufgabe:</u>
Was ist ein Nullvektor?

<u>wichtig:</u>
Jedem Pfeil mit Anfangs- und Endpunkt ist eindeutig ein Vektor (Spaltentripel im R^3) zugeordnet, aber jedem Vektor sind unendlich viele Pfeile zugeordnet.

Bsp:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ mit P(2;2;3) und Q(6;4;5) oder $\vec{v} = \overrightarrow{RS}$ mit R(4;0;0) und S(8;2;2)

Suchen Sie weitere *Repräsentanten* des Vektors $\vec{v}$.

Welche Rechenregeln gelten für Vektoren?

S-Multiplikation:

Eine Verlängerung des Vektors um einen entsprechenden Faktor

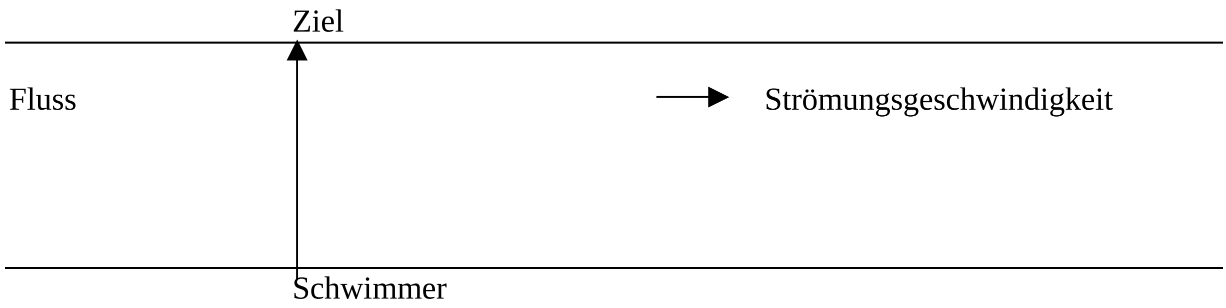
Bsp: Sei v = 30 km/h die Geschwindigkeit eines Autos, dann ist 2v 60 km/h.

<u>Aufgabe:</u>

Wie kann die Multiplikation eines Vektors mit
a) Null
b) einer negativen Zahl

geometrisch interpretiert werden?

Addition:



<u>Aufgabe:</u>

Zeichnen Sie die Bahn des Schwimmers ein.
Wo wird er ans Ufer gehen?
Was muss er tun, damit er am Zielort ankommt?
Wird dies immer funktionieren?

In der Physik wird der Vektor $\vec{a} + \vec{b}$ z.B. als resultierende Kraft bezeichnet.

WIE GEHT'S?

Die Kurvenfahrt

Von Bernd Eusemann

„Wie kriegt man beim Radfahren die Kurve?" fragt sich unser Leser Klaus Gerhold aus Schwerte. Und mit ihm selbst namhafte Physiker.

Physik gilt bei Schülern nicht gerade als Bringer. Doch anders als früher versuchen Lehrer heute, das Interesse mit der Nähe zum Alltag anzufachen. Da kommt ihnen auch das Fahrrad gelegen – oder besser die Frage: wie man selbiges um die Kurve bringt, eben ohne sich zu legen. Dafür interessieren sich seit gut hundert Jahren immer mal wieder Physiker. Selbst so herausragende Köpfe wie Felix Klein (1849 bis 1925) und Arnold Sommerfeld (1868 bis 1951) griffen das Alltagsproblem auf.

Ohne groß übers Radfahren nachzudenken, erlernen wir's in frohen Kindertagen intuitiv. Wir machen später nämlich gleichsam alles von alleine richtig, um in jeder Situation Balance zu halten – na ja, in fast jeder. Wir selbst nehmen eine besonders stabile Lage ein, wenn unser Schwerpunkt – er liegt etwas oberhalb des Bauchnabels – senkrecht über unseren Füßen und dem Raum zwischen ihnen liegt. Das Fahrrad hingegen berührt den Boden nur an zwei Punkten, eben dort wo die Reifen aufliegen. Was hier nun im Stehen kaum zu schaffen ist, lässt sich beim Fahren schier mühelos erreichen: Gleichgewicht. Aber dynamisch. Ebenfalls nötig ist, dass der Schwerpunkt über der Verbindungslinie der beiden Auflagepunkte bleibt. Freilich droht der Radler dabei ständig nach der einen oder andern Seite zu kippen und stürzt dennoch nicht. Des Rätsels Lösung zeigt die Reifenspur auf regennasser Straße mit ihren leicht gewellten Linien.

Auch die Fahrt geradeaus ist nämlich im Grunde eine Abfolge kaum merklicher Kreisbögen. Die am Schwerpunkt angreifende Schwerkraft ruft ein Drehmoment hervor, das Rad samt Fahrer um die genannte Verbindungslinie gen Boden zu drehen sucht. Dem wirkt man vor allem durch Drehen des Lenkers entgegen. Und zwar beim Kippen nach links nicht etwa durch Gegensteuern zur rechten Seite, sondern genau in die gleiche Richtung: nach links. Andernfalls käme es erst recht zum Sturz. Schlägt das Rad eine Kreisbahn ein, so ist hierfür eine Kraft zum Mittelpunkt hin nötig. Sie hängt sowohl von der Geschwindigkeit des Fahrrads wie seiner Masse samt Fahrer und dem Radius der Kurve ab. Ursache dafür ist die Reibung am eingeschlagenen Vorderrad, erzeugt von der Muskelkraft des Lenkenden. Der Radler erfährt sie als Zentrifugalkraft, die ihn nach außen drehen will. Indem er seinen Schwerpunkt nach innen verlagert, neigt er das Rad und ruft ein ausgleichendes Drehmoment hervor.

Wie aber neigt man sich richtig? Denn abruptes Lenken etwa nach links würde ja zum Sturz führen. Nein, durch kaum merkliches Lenken nach rechts verursacht der Radler ein Kippen nach links; dann erst dreht er den Lenker nach links und leitet damit deutlich die Linkskurve ein.

Noch genauere Analyse kitzelt einen zusätzlichen Kreiseleffekt um die Achse des Laufrads hervor. Dessen Drehmoment ist zwar viel kleiner. Aber es spürt ein Überkippen des Rades zuerst, fanden Klein und Sommerfeld heraus, und leitet dann von selbst die fürs Gleichgewicht nötige Radneigung ein.

BILD: PRIVAT

Unser Experte für alle Fälle – fast alle: Bernd Eusemann weiß Antworten auf knifflige Fragen.

Frankfurter Rundschau 3.4.2004

Aufgaben:

1. Bestätigen Sie $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ rechnerisch für:

a) A = (0,5; 5; -1,5) B = (7/2; -4; 4) C = (2; 4; 0,5)

b) A = (1,7; -2,3; 4) B = (2,5; -3,1; -4,2) C = (-0,7; 3,6; -1,9)

2. Zeichnen Sie die Pfeile $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Endpunktes D mit $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

a) A = (-1; 2; 3) B = (2; 2; -4)

b) Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA}$.

c) Um welche Figur handelt es sich bei dem Viereck OBDA?