Einführung in die Integralrechnung

Problem:
Es soll die Seitenwand einer Sprungschanze angestrichen werden.
Die Absprungbahn kann durch die Funktion f mit f(x) = x^2 angenähert werden.
Es muss also eine Fläche unterhalb eines Funktionsgraphen berechnet werden.

Bisher bekannt:
Flächenberechnung von Rechtecken, Dreiecken.

Lösungsidee:
Rückführung der Flächenberechnung unterhalb des Graphen von x^2 auf die bekannte Flächenberechnung von Rechtecken, indem die Fläche in viele kleine Rechtecke aufgeteilt wird. Dabei besteht die Möglichkeit, die rechte oder die linke Grenze der Intervalle auf der x-Achse als Höhe der Rechtecke zu wählen.
Wenn die rechte Seite als Höhe gewählt wird, ist die Gesamtfläche aller Rechtecke größer als die Fläche unterhalb des Graphen von x^2, wenn die linke Seite als Höhe gewählt wird, ist sie kleiner. Veranschaulichen Sie sich dies an einer Skizze!

Diese so entstehenden Flächen werden Obersumme S_o und Untersumme S_u genannt.
S_o = h * (f(h) + f(2h) + ... + f(nh))
S_u = h * (f(0) + f(h) + ….. + f((n-1)h))
Wobei h die Länge und n die Anzahl der Intervalle ist, d.h. die Gesamtlänge auf der x-Achse ist b = n * h

Je kleiner die Breiten der Rechtecke auf der x-Achse gewählt werden, d.h. wenn ihre Länge quasi gegen Null geht (h->0), desto genauer wird die Annäherung der Flächen an die gesuchte Fläche unterhalb der Kurve.
Daher wird folgendes definiert:
Gilt $\lim\limits_{h->0} S_o = \lim\limits_{h->0} S_u$, dann nennen wir diesen Grenzwert das bestimmte Integral von f in den Grenzen von 0 und b, geschrieben: $\int_0^b f(x)dx$

Berechnung der Obersumme:

$\lim\limits_{h->0}(h * (h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + ... + (nh)^2)) =$	ausklammern von h^2
$\lim\limits_{h->0}(h^3 * (1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)) =$	Ersetzen der Reihe durch Formel
$\lim\limits_{h->0}(h^3 * \frac{n(n+2)(2n+1)}{6}) =$	Ersetzen von h durch $\frac{b}{n}$, da b=n*h
$\lim\limits_{n->\infty} \frac{b^3 n(n+2)(2n+1)}{6n^3} =$	kürzen
$\lim\limits_{n->\infty} \frac{b^3(2n^2+3n+2)}{6n^2} =$	Anwendung der Grenzwertsätze
$\frac{2b^3}{6} = \frac{b^3}{3}$	

Analog lässt sich die Untersumme berechnen.