## Einführung in die Differentialrechnung

Aufgabe:

Skater und In-Line-Skater benutzen für ihre Sprünge und Kunststücke verschiedene Geländeformen und Rampen. Fig. 1 zeigt eine spezielle Rampe.

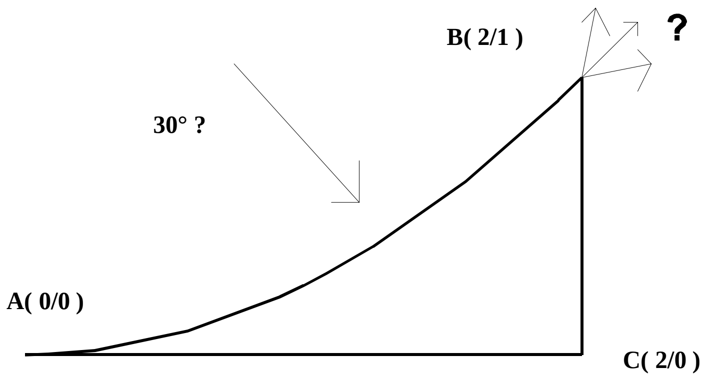


Fig. 1 Modell einer Rampe

Die Anlaufkurve dieser speziellen Rampe lässt sich durch die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ beschreiben ( Einheit: m ). Zeichnen Sie den Funktionsgraphen mit Derive.
Wenn man die Schwerkraft vernachlässigt, fliegt der Springer auf einer Geraden „tangential" weiter. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden und den Absprungwinkel.

Lösungshinweise:

zu a) Zeichnen Sie die Gerade zwischen A und B berechnen Sie die Steigung.
Der Punkt A( 0/0 ) liefert: $y = \frac{1}{2}x$; $m = 0{,}5$ und somit $\alpha = \arctan 0{,}5 \approx 26{,}6°$

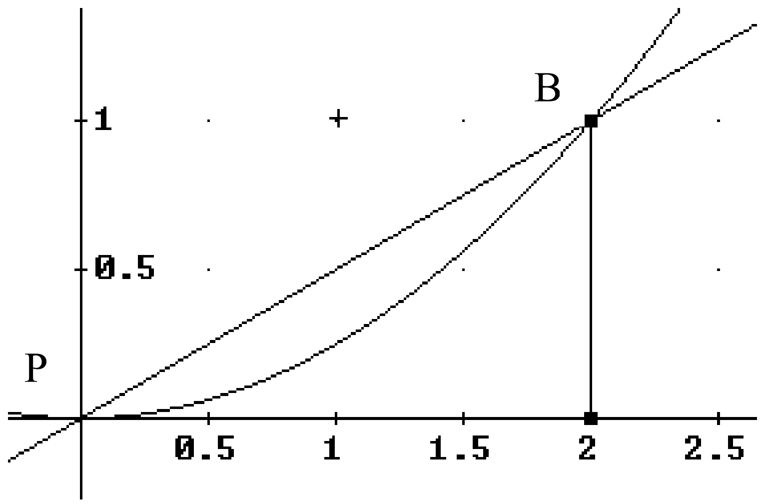


Fig.2 Graph von f mit Sekante

Diese Wahl der Punkte ist sehr grob. Wählen Sie Punkte auf dem Graphen von f, die näher an B liegen und ermitteln Sie die zugehörigen Geradengleichungen.

Was fällt Ihnen auf?

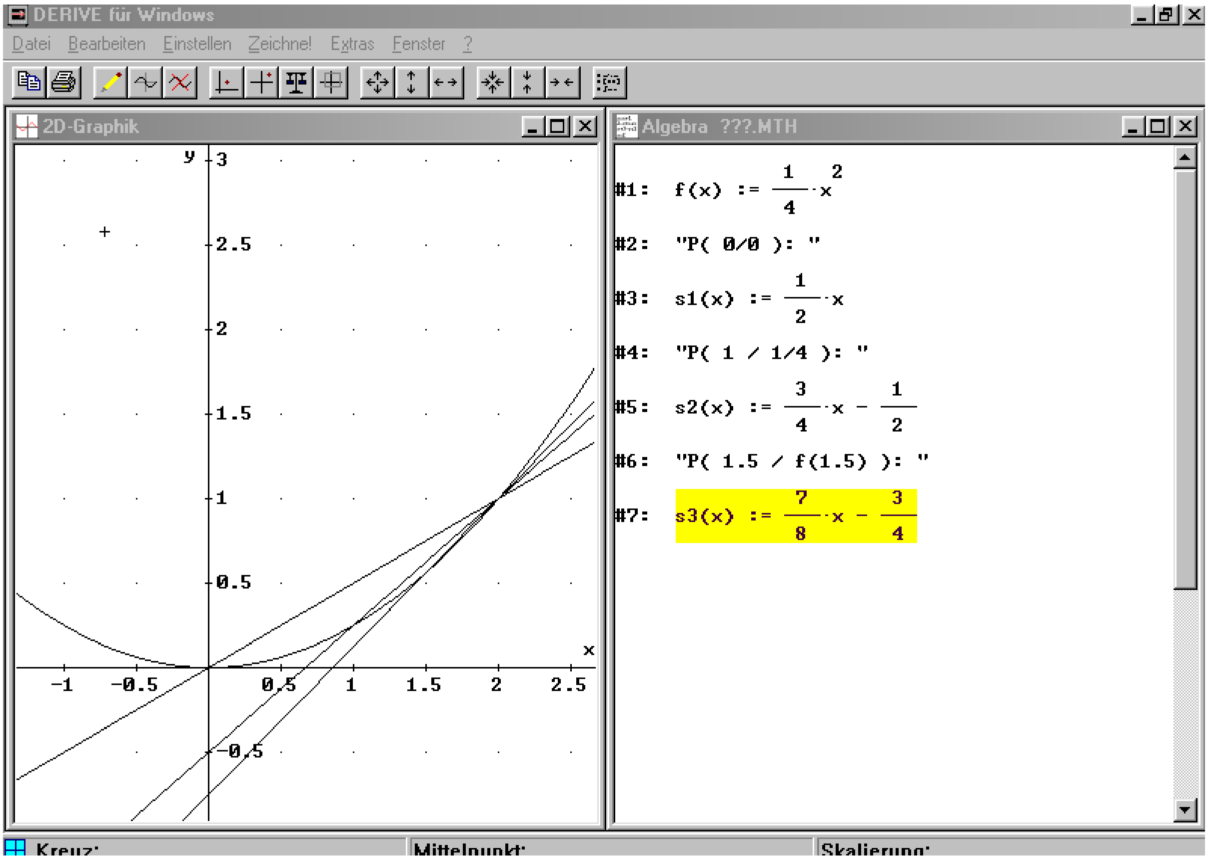


Fig.3 Graph mit Sekanten im Graphikfenster
und Daten im Algebrafenster

Ergebnisse:
- die Geraden verlaufen umso steiler je näher der Hilfspunkt P an B liegt
- das tatsächliche Absprungverhalten scheint von den Geraden, bei denen der Hilfspunkt P „sehr nahe" an B liegt, am besten beschrieben zu werden

Um den Punkt P „beliebig nahe an B zu bringen", bietet sich ein allgemeineres Vorgehen an
P bekommt die Koordinaten 2 - h und f( 2 - h ) mit h >0:
P( 2 - h / f( 2 - h )) mit h > 0 ; für Derive definieren wir: P(h) := [2 - h, f(2 - h)] und für die Berechnungen bei den Geraden s mit s ( x,h ) = m(h) x + b(h):

$$m(h) := \frac{f(2) - f(2-h)}{h}, \quad b(h) := \frac{1}{2}h - 1 \text{ und } s(x,h) := m(h) + b(h).$$

Dies liefert über Derive oder Rechnung per Hand:

$$s(x;h) := \frac{4-1}{4}x + \frac{1}{2}h - 1$$

Was geschieht, wenn h beliebig klein wird, sich 0 annähert?

$m(h) \rightarrow \frac{4}{4} = 1$ und $b(h) \rightarrow -1$.

Es liegt nahe festzusetzen:
Die Steigungsgerade *im* Punkt B hat die Gleichung t( x ) = x - 1, der entsprechende Absprungwinkel beträgt 45°.

nach: S. Schmidtpott, Differentialrechnung mit Derive