Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

Diese Überlegungen führen zum **1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**:

$$\boxed{J_0'(x) = f(x) \quad \text{(Kurzform)}}$$

d.h. jede Integralfunktion ist Stammfunktion der Ausgangsfunktion,
wobei F eine **Stammfunktion** von f ist, wenn gilt: $F'(x) = f(x)$, d.h. f stammt durch Ableiten von F ab.

Beispiel:

$J_0(x) = \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, also $J_0'(x) = \frac{n+1}{n+1} x^{n+1-1} = x^n = f(x)$

Die Stammfunktion F zu f mit $f(x) = x^n$ ist demnach F mit $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, denn $F'(x) = f(x)$.

Aufgaben:

1. Geben Sie eine Stammfunktion F zu der Funktion f an mit:
   - $f(x) = x^2$
   - $f(x) = x^3$
   - $f(x) = x$
   - $f(x) = 1$
   - $f(x) = 0$
   - $f(x) = x^{-2}$
   - $f(x) = \frac{1}{x^3}$

2. Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f mit $f(x) = x^2$ ist:
   - $F(x) = \frac{1}{3}x^3$
   - $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$
   - $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 0{,}5$
   - $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 17$

   Welchen Zusammenhang erkennen Sie?
   Was bedeutet dies für die Anzahl der Stammfunktionen F zu f?
   Formulieren Sie einen entsprechenden Satz und beweisen Sie ihn.

Wenden wir uns wieder den bestimmten Integralen zu und verallgemeinern wir die Integralfunktion J_0, indem wir die untere Grenze nicht bei 0, sondern bei a beginnen lassen,

d.h. $J_a(b) = \int_a^b f(x)dx$ (Skizze siehe L-S, S.162)

Wie lässt sich mit Hilfe des 1. Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ein bestimmtes Integral $J_a(b) = \int_a^b f(x)dx$ berechnen?

Ist F irgendeine Stammfunktion von f, dann sind alle Funktionen mit F(x) + c, wobei c eine Konstante ist, ebenfalls Stammfunktionen von f, d.h.
$J_a(x) = F(x) + c$
Die Konstante lässt sich berechnen, indem wir das bestimmte Integral
$J_a(a) = \int_a^a f(x)dx$ betrachten, das den Wert 0 hat, also gilt:
$J_a(a) = F(a) + c = 0$, d.h. $c = -F(a)$
Für die gesuchte Integralfunktion gilt dann:
$J_a(x) = F(x) – F(a)$
Für eine feste obere Grenze b gilt dann:

$$\boxed{J_a(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) – F(a)}$$

Dies ist der **2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.**
Schreibweise: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) – F(a)$

Der enge Zusammenhang zwischen der Differential- und der Integralrechnung wird auch deutlich, wenn man einige ihrer Anwendungsbereiche vergleicht:

- Differentialrechnung zur Bestimmung der Steigung eines Funktionsgraphen und der momentanen Änderungsrate

- Integralrechnung zur Bestimmung der Fläche unterhalb eines Funktionsgraphen und der Gesamtänderung

Noch einmal zur Klärung:

Zusammenhang zwischen Integral- und Stammfunktion

Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion, aber nicht jede Stammfunktion ist eine Integralfunktion.

Beispiel:

$F(x) = \frac{x^4}{4} + 4$ ist eine Stammfunktion zu $f(x) = x^3$, denn $F'(x) = x^3$

Aber es gibt kein a mit

$I_a(x) = \int_a^x t^3 dt$,

denn

$I_a(x) = \int_a^x t^3 dt = [\frac{t^4}{4}]_a^x = \frac{x^4}{4} - \frac{a^4}{4}$

Wäre F auch Integralfunktion, müsste gelten:

$$\frac{x^4}{4} - \frac{a^4}{4} = \frac{x^4}{4} + 4$$

also:

$$-\frac{a^4}{4} = 4 \quad /*4$$

$$-a^4 = 16 \quad /*(-1)$$

$$a^4 = -16$$

diese Gleichung ist nicht lösbar, also ist F zwar eine Stammfunktion von f aber keine Integralfunktion