Umkehrfunktionen

Funktionen f sind eindeutige Abbildungen, z.B. von einer Menge D in eine Menge W, d.h. jedem $x \in D$ wird genau ein $f(x) = y \in W$ zugeordnet.

f: x -> $\boxed{\text{Zuordnungsvorschrift, z.B. quadrieren}}$ -> $f(x) = y = x^2$

Kehrt man diesen Vorgang um, erhält man:

$\mathbf{f^{-1}}$: y -> $\boxed{\text{umgekehrte Zuordnungsvorschrift, z.B. Wurzel ziehen}}$ -> x

wobei in diesem Beispiel zu beachten ist, dass $W(f) = R^+ = D(f^{-1})$ sein muss, da nur aus positiven Zahlen die Quadratwurzel gezogen werden kann.
Es gilt also: $\mathbf{f^{-1}(f(x)) = x}$, z.B. $\sqrt{x^2} = x$

Definition:
Sei f: x -> f(x) eine Funktion mit der Definitionsmenge D und der Wertemenge W.
Gibt es eine Funktion f^{-1} mit $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $f(x) \in W$, so heißt f^{-1}: f(x) -> x die **Umkehrfunktion von f**.
D(f) wird zu $W(f^{-1})$, W(f) wird zu $D(f^{-1})$, $D(f^{-1})$ wird zu W(f) und $W(f^{-1})$ wird zu D(f).

Satz:
Eine Funktion f hat nur dann im Intervall I eine Umkehrfunktion, wenn f auf ganz I streng monoton ist.

Geometrische Deutung:
Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} von f ist der an der 1. Winkelhalbierenden (y = x) gespiegelte Graph der Funktion f.

Berechnung der Umkehrfunktion:

1. Nachweis der Existenz der Umkehrfunktion über einem Intervall I, indem untersucht wird, ob für alle $x \in I$ gilt: $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$, d.h. Monotonienachweis mittels der 1. Ableitung

2. Berechnung der Variablen x aus der Gleichung f(x) = y, d.h. auflösen nach x

3. Umbenennen der Variablen x und y (x <-> y), damit die Funktionsgleichung wieder in einem „gewohnten Bild" erscheint.

Beispiel:
$f(x) = x^2$
1. $f'(x) = 2x > 0$ für alle $x \in R^{>0}$, d.h. es existiert eine Umkehrfunktion über $R^{>0}$
2. $y = x^2$ /Wurzel ziehen
   $\sqrt{y} = x$
3. umbenennen von x und y: $f^{-1}(x) = y = \sqrt{x}$