Verpackungsoptimierung bei 1-Liter-Tüten

Milch- oder Safttüten haben oft die Form einer quadratischen Säule. Sie werden aus einer rechteckigen beschichteten Pappe hergestellt. Der Inhalt von 1 Liter ist vorgegeben, allerdings wird die Flüssigkeit nur bis 2 cm unterhalb des oberen Rands eingefüllt.
Für das Verkleben der Seiten werden Ränder von 1 cm bei der Ober- und Unterseite und 0,5 cm an der Randseite benötigt, für die Falten auf der Ober- und Unterseite wird jeweils ein Streifen von 0,5x cm verwendet, damit die quadratische Ober- und Unterseite stabilisiert wird.
Sind diese Tüten hinsichtlich des Materialverbrauchs optimiert?

Arbeitsaufträge:

- Fertigen Sie eine Skizze der Verpackungspappe an.

- Stellen Sie unter Verwendung der Variablen x für die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche und h für die Höhe der Tüte eine Formel zur Berechnung der Gesamtfläche der Verpackungspappe auf.

- Stellen Sie unter Verwendung der Variablen x und h eine Formel zur Berechnung des Volumens der Tüte auf.

- Eliminieren Sie die Variable h aus der Volumenberechnung (1 Liter = 1000 cm^3)

- Setzen Sie den so gewonnenen Wert für h in die Formel für die Gesamtfläche ein.

- Ermitteln Sie den Wert für x, für den die Gesamtfläche minimal wird.

- Überprüfen Sie, ob der Wert für x wirklich die Lösung des Problems liefert.

Lösungen:

- Skizze siehe L-S S. 108

- $A = (4x + 0,5)(h + x + 2)$
- $V = x^2 (h – 2)$
- V = 1000, also: $h = \frac{1000}{x^2} + 2$

- $A = (4x + 0,5)(\frac{1000}{x^2} + 2 + x + 2)$, also: $A = \frac{4000}{x} + 4x^2 + 16,5\, x + \frac{500}{x^2} + 2$

- $A'(x) = -\frac{4000}{x^2} + 16,5 + 8x - \frac{1000}{x^3}$ und $A''(x) = \frac{8000}{x^3} + 8 + \frac{3000}{x^4}$
  A'(x) = 0 liefert x = 7,39 und h = 20,29, A''(7,39) = 28,79>0 also: TIP an x = 7,39

- Der Vergleich mit einer realen Milch- oder Safttüte zeigt, dass die reale Verpackung recht gut optimiert ist.