Flächenberechnung

Aufgabe 1:

Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse in den Grenzen von 0 bis 2 von:

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = -x^2$

Skizzieren Sie die Funktionsgraphen und schraffieren Sie die zu berechnende Fläche.
Was fällt Ihnen auf?

....

Lösung: Der Wert der beiden Integrale $\int_0^2 f(x)dx$ ist $\frac{8}{3}$, bzw. - $\frac{8}{3}$.

Beide Integrale geben **orientierten Flächeninhalt** an. Liegt eine zu berechnende Fläche unterhalb der x-Achse, erhalten bei der Berechnung des Integrals einen negativen Wert.
Da Flächenmaßzahlen aber nicht negativ sein können, müssen wir bei der Berechnung von Flächen, die unterhalb der x-Achse liegen, den Betrag des Integrals nehmen, d.h.

$A = \left| \int_0^2 -x^2 dx \right| = \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3}$ FE

Wir sprechen dann vom **absoluten Flächeninhalt**.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse in den Grenzen von –2 bis 2 von

a) $f(x) = x$
b) $f(x) = x^2$
c) $f(x) = x^3$
d) $f(x) = 1$

Skizzieren Sie die Funktionsgraphen und schraffieren Sie die zu berechnende Fläche.
Was fällt Ihnen auf?

....

Berechnet man die Integrale $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ mit Hilfe des 2. Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, so erhält man bei a) und c) den Wert 0. Der schraffierte Flächeninhalt ist aber eindeutig ungleich 0.
Es heben sich die negativen und positiven Werte bei der Berechnung des Integrals auf, d.h. der orientierte Flächeninhalt kann 0 sein, obwohl die Flächenmaßzahl größer als 0 sein muss.
Um den absoluten Flächeninhalt zu berechnen, müssen wir das Intervall so unterteilen, dass wir die Beträge von Teilintegralen addieren können. Wichtig ist daher zuerst die Ermittlung der Nullstellen der Funktion.

Unter: http://www.stauff.de/bewmath/dateien/bewmath.html finden Sie das Programm intfl.exe, das den Unterschied zwischen Integral und Fläche verdeutlicht.
Im L-S, S. 168 finden Sie in den Beispielen 2 und 3 eine ausführliche Anleitung zum Thema.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die Fläche zwischen den Funktionsgraphen der Funktionen f und g mit
f(x) = x^2 und g(x) = -x + 3,75 und der positiven x-Achse.
Skizzieren Sie die Funktionsgraphen und schraffieren Sie die gesuchte Fläche.
Welche Besonderheit liegt hier vor und was bedeutet dies für die Rechnung?

....

Wird die Fläche von mehreren Funktionsgraphen begrenzt, müssen bei der Bildung von Teilintervallen nicht nur **Nullstellen**, sondern auch **Schnittpunkte** der Graphen berücksichtigt werden.

Lösungshinweise:
Nullstellen:
f(x) = 0 ,also:. x = 0
g(x) = 0 ,also:. x = 3,75
Schnittstelle von f und g: f(x) = g(x), also: x = -2,5 und x = 1,5
Berücksichtigung der Aufgabenstellung ergibt, dass die Lösung –2,5 nicht in Frage kommt.

A= $|\int_0^{1,5} x^2 dx| + |\int_{1,5}^{3,75} (-x+3{,}75)dx|$

Aufgabe 4:

a) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Funktionsgraphen der Funktionen f und g mit
f(x) = $\frac{1}{x^2}$ und g(x) = x^3 im Intervall [0; 3].
Skizzieren Sie die Funktionsgraphen und schraffieren Sie die gesuchte Fläche.

Lösungshinweise:
Nullstelle von g: x = 0
Nullstelle von f: nicht vorhanden, f ist für x = 0 nicht definiert (Polstelle)
Schnittstelle: f(x) = g(x) für x = 1

A = $|\int_0^1 x^3 dx| + |\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx|$, wobei die Betragsstriche auch entfallen können, da beide Flächen oberhalb der x-Achse liegen

A = $\frac{11}{12}$ FE

b) Berechnen Sie die Fläche der obigen Funktionen im Intervall [0; a], mit $a \in R$.

c) Wie müsste die rechte Grenze a gewählt werden, damit die Flächenmaßzahl 1 FE wird?

Lösungshinweis:

$A = \frac{5}{4} - \frac{1}{a} = 1$

LK-Zusatz:

d) Welche Maßzahl kann der Flächeninhalt höchstens annehmen, d.h. wie groß ist der Flächeninhalt, wenn die rechte Grenze unendlich groß wird?

Lösungshinweis:

$A = \int_0^1 x^3 dx \; + \; \lim_{a \to \infty} (\; (= \frac{1}{4} + \lim_{a \to \infty} (-\frac{1}{a} + 1) = \frac{5}{4}$ FE Betragsstriche können entfallen, da die Teilflächen alle oberhalb der x-Achse liegen.

Ist eine Integrationsgrenze unendlich groß, d.h. bildet man $\lim_{a \to \infty} \int_0^a f(x)dx$, spricht man von einem **uneigentlichen Integral.**

e) Welche Maßzahl hat der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen von h mit $h(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ und der x-Achse im Intervall [0; 3] ?

Lösungshinweis:

Für x = 0 ist die Funktion h nicht definiert, der 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ließe sich also nicht anwenden.
Eine Übertragung der Idee des uneigentlichen Integrals für unendlich große Integrationsgrenzen führt auf die Idee, den Grenzwertprozess zu Hilfe zu nehmen. Statt des Grenzwertes $a \to \infty$ müssten wir jetzt a allgemein als untere Grenze einsetzen und dann a gegen 0 gehen lassen. D.h. zuerst wird der Flächeninhalt im Intervall [a;4] allgemein berechnet und anschließend der Grenzwertprozess $a \to 0$ angewendet.

$A = \lim_{a \to 0} \left(\int_a^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx \right) = \lim_{a \to 0} [4\sqrt{x}\,]_a^4 = \lim_{a \to 0} (4\sqrt{4} - 4\sqrt{a}\,) = 8 - \lim_{a \to 0} 4\sqrt{a} = 8$ FE

Die Betragsstriche können entfallen, da der Funktionsgraph oberhalb der x-Achse liegt.

.

f)Welche Maßzahl hat der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen von f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und der x-Achse im Intervall [0; 3] ?

Lösungshinweis:

Bei x = 0 liegt eine Polstelle, so dass der Funktionswert von f an dieser Stelle nicht existiert. Auch hier liegt ein uneigentliches Integral vor, allerdings muss der Grenzwert von a-> 0 betrachtet werden:

$A = \lim_{a \to 0} \left(\int_a^3 \frac{1}{x^2} dx \right) = \lim_{a \to 0} [-x^{-1}]_a^3 = \lim_{a \to 0} \left(-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{a}\right)\right) = -\frac{1}{3} + \lim_{a \to 0} \frac{1}{a}$ dieser Grenzwert existiert nicht, also lässt sich auch keine Flächenmaßzahl angeben.

Fläche zwischen 2 Funktionsgraphen

<u>Aufgabe 5:</u>

a) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Funktionsgraphen der Funktionen f und g mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x + 3{,}75$.

Lösungshinweis:

Bekannt ist die Fläche zwischen f, g und der positiven x-Achse (siehe Aufgabe 3), jetzt soll die von f und g eingeschlossene Fläche berechnet werden.
Dazu müssen erst die Schnittpunkte der beiden Funktionen ermittelt werden, indem die Funktionsterme gleichgesetzt werden.
Die so ermittelten x-Koordinaten –2,5 und 1,5 bilden die Integrationsgrenzen.
Wir berechnen:

$A = \left| \int_{-2{,}5}^{1{,}5} (-x + 3{,}75) dx \right| - \left| \int_{-2{,}5}^{1{,}5} x^2 dx \right| = 10{,}67$ FE

b) Berechnen Sie:

$$\int_{-2{,}5}^{1{,}5} ((-x + 3{,}75) - x^2) dx$$

Was fällt Ihnen auf?

....

Aufgabe 6:

Zeigen Sie, dass für stetige Funktionen f und g mit $f(x) \geq g(x)$ für $x \in [a;b]$ gilt, dass die Flächenmaßzahl A zwischen den Funktionsgraphen von f und g folgendermaßen berechnet wird:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

und dass die Nullstellen von f oder g nicht berücksichtigt werden müssen.

Lösungshinweis:
Anwendung des 2. Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

Aufgabe 7:

Berechnen Sie die Fläche zwischen den Funktionsgraphen von f und g mit $f(x) = 0{,}5x + 4$ und $g(x) = 0{,}5\,x^2 + 1$.

Lösungshinweis:
Schnittpunkte bei x = -2 und x = 3
Überprüfen, welche Funktion im Intervall [-2;3] größer ist

$A = 10\frac{5}{12}$ FE

Aufgabe 8:

Berechnen Sie die Fläche zwischen den Funktionsgraphen von f und g mit $f(x) = 2x^3 - 7x$ und $g(x) = x$.

Lösungshinweis:
Schnittpunkte für x = 0, x = 2 und x = -2 ermitteln
Überprüfen, welche Funktion im Intervall [-2;0] und [0;2] jeweils größer ist

$$A = \left| \int_{-2}^{0} (g(x) - f(x))dx \right| + \left| \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))dx \right| = 16 \text{ FE}$$

Aufgabe 9:

Berechnen Sie:

$$|\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx\ | + |\int_{0}^{2}(f(x)-g(x))dx|$$

Was fällt Ihnen auf?

....

Aufgabe 10:

Zeigen Sie, dass die Fläche zwischen 2 Funktionsgraphen berechnet wird, indem der Betrag des Integrals der Differenzfunktion zwischen den Schnittstellen berechnet wird

A = $|\int_{a}^{b}(f(x)-g(x))dx|$, wobei a und b die Schnittstellen der Funktionen f und g sind

Dabei ist es unerheblich, ob f(x) > g(x) über [a;b] ist oder f oder g Nullstellen in diesem Intervall haben.

Lösungshinweis:

A = $|\int_{a}^{b}(f(x)-g(x))dx| = |[F(x) – G(x)]_{a}^{b}| = |F(b) – F(a) – (G(b) – G(a))|$

Fallunterscheidung:

1. f(x) > g(x) für [a;b]: die Betragsstriche können entfallen
2. f(x) < g(x) für [a;b]: beim Auflösen der Betragsstriche muss der Term, der innerhalb der Betragsstriche steht, mit –1 multipliziert werden

   A = - (F(b) – F(a) – (G(b) – G(a))) = G(b) – G(a – (F(b) – F(a)) = $\int_{a}^{b}(g(x)-f(x))dx$