Grundlagen „Funktionsbegriff“

Einstiegsfragen (die Sie sich vielleicht bereits gestellt haben oder stellen sollten ;))

- Was versteht man unter einer Funktion?
- Wie kann man eine Funktion beschreiben und darstellen?
- Welche Fragestellungen ergeben sich im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff?

Eine Funktion ist eine Zuordnung, die jedem Element x aus der Definitionsmenge genau ein Element y aus der Wertemenge zuordnet.

Beispiele:
Die Zuordnung heißt „ist befreundet mit“.
Die Definitionsmenge bilden die Mädchen und die Wertemenge die Jungen.

Stellen Sie als Pfeildiagramm dar, dass Anna mit Klaus und Michael, Beate mit Ludger, Claudia mit Paul, Doris mit Ludger, Elke mit Paul, Frauke mit Michael und Gerda mit Otto befreundet ist, d.h. zeichnen Sie für jede Beziehung einen Pfeil von links nach rechts ein.

Anna	Klaus
Beate	Ludger
Claudia	Michael
Doris	Norbert
Elke	Otto
Frauke	Paul
Gerda	

Sie stellen fest, dass jedem Mädchen mindestens ein Junge als Freund zugeordnet ist. Anna hat zwei Freunde, was in der Realität vorkommen kann, aber in der Mathematik der Forderung „genau ein Element zuordnen“ nicht entspricht. Diese Zuordnung „ist befreundet mit“ ist daher keine Funktion sondern „nur“ eine Relation.
Sehen wir uns jetzt die Situation aus der Perspektive der Jungen an, stellen wir fest, dass einige Jungen mit zwei Mädchen befreundet sind (Ludger, Paul und Michael) und ein Junge keine Freundin aus dieser Gruppe hat. Auch das kann in der Realität vorkommen, kennzeichnet aber keine Funktion.

Wie müsste diese „ist befreundet mit“ – Relation verändert werden, damit jedem Mädchen genau ein Junge zugeordnet wird?

In unserem Kulturkreis gelingt dies mit der „ist verheiratet mit“ – Funktion.

Darstellung einer Funktion

Sie haben gerade Pfeildiagramme als graphische Beschreibung von Zuordnungen und Funktionen kennen gelernt. In der Mathematik werden häufig andere Formen gewählt, z.B. Funktionsgleichungen, Graphen oder Punktepaare.

*Eine **Funktionsgleichung** hat einen Namen, eine Variable und einen **Term**, mit dem die Vorschrift ausgedrückt wird, die jedem x genau einen Funktionswert y oder f(x) zuordnet.*

Beispiel:

Betrachten wir im Folgenden die Funktion, die das Verdoppeln von Zahlen beschreibt.

Im Allgemeinen werden Funktionen mit dem Namen f versehen und die Variable erhält den Namen x. In bestimmten Sachverhalten, z.B. bei der Berechnung von Geschwindigkeiten, werden andere Namen vergeben, z.B. v (für Geschwindigkeit) als Name der Funktion und t (für Zeit) als Variable.
Mit f(x) wird der zugehörige Funktionswert bezeichnet, der sich ergibt, wenn man für x konkrete Werte einsetzt.
Die Zuordnungsvorschrift, hier das Verdoppeln von Zahlen, wird als Funktionsterm unter Verwendung der Variablen, z.B. durch 2x beschrieben.
Da mit der Zuordnungsvorschrift jedem x ein konkreter Funktionswert zugeordnet werden kann, lässt sich folgende Funktionsgleichung aufstellen:

$f(x) = 2x$ wobei die rechte Seite, also 2x der Funktionsterm ist.

Name f Variable x Term 2x

Wichtig: wenn ein konkreter Wert für x in eine Funktionsgleichung eingesetzt wird, z.B. 3, dann muss dieser Wert überall für x eingesetzt werden, d.h. auch auf der linken Seite der Funktionsgleichung. Aus $f(x) = 2x$ wird dann $f(3) = 2 \cdot 3 = 6$. Der Funktionswert an der Stelle $x = 3$ hat also den Wert 6. Der Punkt (3; 6) liegt auf dem Graphen von f.

*In einer **Wertetabelle** können die Punkte eingetragen werden, die die Funktionsgleichung erfüllen und auf ihrem Graphen liegen, indem jeweils zu einem konkreten Wert aus der Definitionsmenge der zugehörige y-Wert durch Einsetzen dieses Wertes für die Variable in die Funktionsgleichung berechnet wird.*

Beispiel:

$f(x) = 2x$
$f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$

x	-2	-1	0	0,5	1	2	3
f(x) oder y	-4	-2	0	1	2	4	6

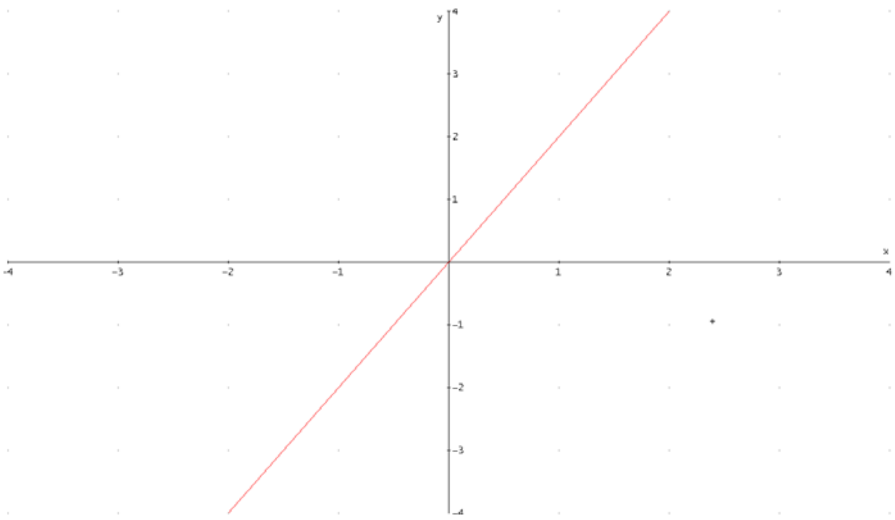
Ein ***Graph*** *veranschaulicht den Zusammenhang zwischen den Zahlen aus dem Definitionsbereich und den zugehörigen Elementen aus dem Wertebereich in einem rechtwinkligen (kartesischen) Koordinatensystem.*

Ein Punkt P(x; y) oder auch P(x; f(x)) hat zwei Koordinaten, eine x- und eine y-Koordinate. Die erste Koordinate wird auf der horizontalen x-Achse und die zweite auf der vertikalen y-Achse abgetragen.

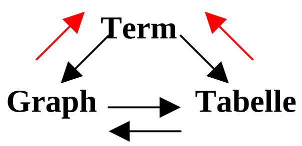
Beispiel:

Aus der obigen Wertetabelle entnehmen wir die Punkte:
P_1(-2; -4); P_2(-1; -2); P_3(0;0); P_4(0,5; 1); P_5(1; 2)

Um P_1 einzuzeichnen, markieren wir auf der x-Achse die Stelle –2 und zeichnen (oder denken uns) eine Parallele zur y-Achse. Als nächstes markieren wir auf der y-Achse die Stelle –4 und zeichnen, bzw. denken uns eine Parallele zur x-Achse. Der Schnittpunkt dieser beiden (gedachten) Parallelen zu den Koordinatenachsen markiert die Lage des Punktes P_1.
Wenn man auf diese Art mehrere Punkte einzeichnet und sie verbindet, erhält man den Graphen einer Funktion.
Der Graph der „Verdoppelungsfunktion“ f mit f(x) = 2x ist eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung (0; 0) geht.



Wie Sie sicher schon bemerkt haben, kann man zwischen den einzelnen Darstellungsarten der Funktionen wechseln.



Die Wechsel von Term in Tabelle oder Graph werden häufig benötigt und sind recht einfach, der Wechsel von der Tabelle, z.B. bestehend aus Messwerte in eine Funktionsgleichung ist etwas schwieriger, da von der allgemeinen Form der Funktionsgleichung ausgegangen werden muss. Durch Einsetzen der bekannten Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung können die Parameter berechnet werden. Dies geschieht in der Regel durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems.