Ganzrationale Funktionen - Nullstellenberechnung

Bekannt:
Nullstellen einer Funktion sind die Stellen, an denen der Funktionswert $f(x) = 0$ wird.
Graphisch bedeutet dies den Schnittpunkt mit der x-Achse.

Gleichungen der Form $f(x) = 0$ treten in der Mathematik häufig auf, z.B. Nullstellen einer Funktion, Schnittpunkt von Funktionen (wenn nach dem Gleichsetzen der Funktionsterme die Gleichung so sortiert wird, dass auf der rechten Seite nur noch 0 steht), notwendige Bedingung von Extrem- oder Wendestellen.

Bisher können lineare und quadratische Gleichungen gelöst werden. Gleichungen höheren Gerades versucht man, durch geschickte Termumformungen auf Gleichungen zurückzuführen, die man mit bekannten Verfahren lösen kann. Dazu dient das Verfahren des Faktorisierens.

pq – Formel

für die quadratische Gleichung

$0 = x^2 + px + q$ sind die Lösungen: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Faktorisieren

Ziel ist es z.B. durch Ausklammern und / oder Anwendung der Binomischen Formeln Summenterme in Produkte umzuwandeln, denn ein Produkt hat die Lösung 0, wenn einer der Faktoren 0 wird.

Beispiel: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x = 0$ ausklammern von x liefert
$x(x^2 - x - 4) = 0$ Faktoren einzeln gleich 0 setzen
$x = 0 \lor x^2 - x - 4 = 0$
Lösen der quadratischen Gleichung mit pq-Formel, quadratischer Ergänzung oder dem Satz von Vieta
$x = 0 \lor x = ½ \pm \sqrt{1/4-(-4)}$
$x = 0 \lor x = ½ + \sqrt{\frac{17}{4}} \lor x = ½ - \sqrt{\frac{17}{4}}$
$x = 0 \lor x = 2{,}56 \lor x = -1{,}56$

Aufgabe 1
a) $0 = x^2 - 4$ b) $0 = x^2 + 4$ c) $0 = 8 - 2x^2$ d) $0 = -18 + ½x^2$
e) $0 = x^2 – x$ f) $0 = x(x - 1)$ g) $0 = (x - 1)(x + 2)$ h) $0 = 3(x - 2)x(x + 2)$

Aufgabe 2
a) $0 = 3x^2 + 3x - 18$ b) $0 = 2x^2 - 4x + 2$ c) $0 = ½x^2 - ½x - 3$ d) $0 = 3(x^2 - 3x + 6)$

neu:

<u>Polynomdivision</u>

Lässt sich nicht direkt erkennen, ob durch Anwenden der Binomischen Formel oder durch geschicktes Ausklammern eine Gleichung in Faktoren zerlegt werden kann, hilft das Verfahren der Polynomdivision weiter.
Es entspricht dem schriftlichen Dividieren, nur (;-)) dass dies jetzt mit Termen erfolgt. Eine ausführliche Erklärung dieses Verfahrens finden Sie unter:

Station 13 Polynomdivision, Download Stationenlernen
http://www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/projekte/downloads/downloaddinslaken1.htm und / oder
http://www.fell-mg.de/mathematik/javascript/polynomdivision/index.htm

<u>Aufgabe 3</u>
Lösen Sie durch Polynomdivision!
a) $0 = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ b) $0 = 2x^3 - 6x + 4$ c) $0 = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
d) $0 = x^3 – x^2 + 2x – 2$ e) $0 = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$

<u>Substitution</u>

Ganzrationale Funktionen, in denen x nur in der 4., 2. und 0. Potenz vorkommt, z.B. $f(x) = x^4 + x^2 +3$ lassen sich durch Substitution der Variablen x^2 durch eine andere Variable, z.B. z auf eine quadratische Gleichung zurückführen.
Verfahren:
Ersetzen Sie x^2 durch z, lösen Sie die quadratische Gleichung in z, führen Sie anschließend die Rücksubstitution durch, indem Sie z durch x^2 ersetzen und nach x auflösen. Sie erhalten 4 Lösungen für die Variable x.

Siehe:
http://www.fell-mg.de/mathematik/javascript/BiquadratischeGleichungen/index.htm

<u>Aufgabe 4</u>
Lösen Sie durch Substitution: $x^2 = z$
a) $0 = x^4 - 5x^2 + 4$ b) $0 = x^4 - 8x^2 – 9$ c) $0 = ¼x^4 - 2x^2 + 4$ d) $0 = 2x^4 + 6x^2 – 8$

<u>Überlegungen</u>

Wie viele Nullstellen kann eine ganzrationale Funktion *n*-ten Grades maximal haben?

Für welche *a* hat die quadratische Funktion $f(x) = x^2 – x – a$ keine, eine (= doppelte) oder zwei Nullstellen?

für Studierende des LKs

Newtonsches Iterationsverfahren

In der Lerneinheit LK Zusatz 3 wird ein Verfahren vorgestellt, das iterativ mit Hilfe von Funktionswerten von f und f' die Nullstellen berechnet.
In der Übersicht über Mathematikmaterialien von SelMa finden Sie unter Angebote anderer Autoren eine Visualisierung des Newton-Verfahrens http://www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/uebersichten/uebersicht_mathematik.htm