

Herleitung der Scheitelpunktsform und Scheitelpunktskoordinaten

1. Überlegung:

Gegeben sei eine quadratische Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$

Ausklammern von a führt zu: $f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$

Quadratische Ergänzung liefert: $f(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right)$

Zusammenfassen führt zu: $f(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)$

Die Scheitelpunktkoordinaten sind:

$$x_s = -\frac{b}{2a} \quad \text{und} \quad y_s = a \frac{4ac - b^2}{4a^2} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

2. Überlegung:

Wenn man die pq-Formel für quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ kennt, empfiehlt sich folgende Überlegung:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \vee \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Der Scheitelpunkt der Parabel zu f mit $f(x) = x^2 + px + q$ hat dann die Koordinaten

$$x_s = -\frac{p}{2} \quad \text{und} \quad y_s = -\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Für quadratische Funktionen f mit $f(x) = ax^2 + px + q$ ergeben sich folgende Scheitelpunktkoordinaten:

$$x_s = -\frac{1}{a} \frac{p}{2} = -\frac{p}{2a} \quad \text{und} \quad y_s = -\left(a \left(\frac{p}{2a}\right)^2 - q\right) \quad \text{oder} \quad y_s = -a \left(\left(\frac{p}{2a}\right)^2 - \frac{q}{a}\right)$$

Merkregel:

x-Koordinate des Scheitelpunktes ist $-\frac{p}{2}$ multipliziert mit $\frac{1}{a}$

y-Koordinate des Scheitelpunktes ist der leicht veränderte Radikand (Division von p und q durch a), der insgesamt mit $-a$ multipliziert werden muss