Herleitung der Scheitelpunktsform und Scheitelpunktskoordinaten

1. Überlegung:

Gegeben sei eine quadratische Funktion f mit $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$

Ausklammern von a führt zu: $f(x) = a\,(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

Quadratische Ergänzung liefert: $f(x) = a\,((x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a})$

Zusammenfassen führt zu: $f(x) = a\,((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a\,((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2})$

Die Scheitelpunktkoordinaten sind:

$$\boxed{x_s = -\frac{b}{2a} \text{ und } y_s = a\frac{4ac - b^2}{4a^2} = \frac{4ac - b^2}{4a}}$$

2. Überlegung:

Wenn man die pq-Formel für quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ kennt, empfiehlt sich folgende Überlegung:

$x^2 + px + q = 0$

$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{((\frac{p}{2})^2 - q)} \quad \vee \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{((\frac{p}{2})^2 - q)}$

Der Scheitelpunkt der Parabel zu f mit $\mathbf{f(x) = x^2 + px + q}$ hat dann die Koordinaten

$$\boxed{x_s = -\frac{p}{2} \text{ und } y_s = -((\frac{p}{2})^2 - q)}$$

Für quadratische Funktionen f mit $\mathbf{f(x) = ax^2 + px + q}$ ergeben sich folgende Scheitelpunktskoordinaten:

$$\boxed{x_s = -\frac{1}{a}\frac{p}{2} = -\frac{p}{2a} \text{ und } y_s = -(a(\frac{p}{2a})^2 - q) \text{ oder } y_s = -a\,((\frac{p}{2a})^2 - \frac{q}{a})}$$

<u>Merkregel:</u>

x-Koordinate des Scheitelpunktes ist $-\frac{p}{2}$ multipliziert mit $\frac{1}{a}$

y-Koordinate des Scheitelpunktes ist der leicht veränderte Radikand (Division von p und q durch a), der insgesamt mit –a multipliziert werden muss