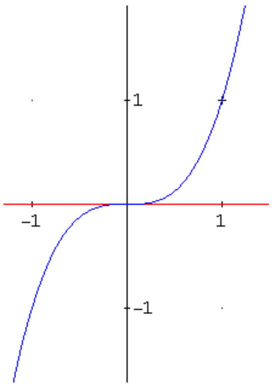
## Vorzeichenwechselkriterium und Einsatz des TR (Casio fx-991 ES)

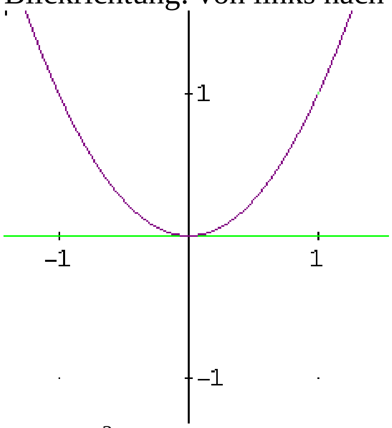
### Untersuchung auf Extrema

Wenn die ***notwendige Bedingung f'(x) = 0*** erfüllt ist, <u>kann</u> an dieser Stelle ein Extremum vorliegen. Es könnte aber auch „nur" eine waagerechte Tangente dort sein, wie bei $f(x) = x^3$ an der Stelle 0 zu sehen ist (hier bildet die x-Achse mit g(x) = 0 die Tangente an der Stelle 0).



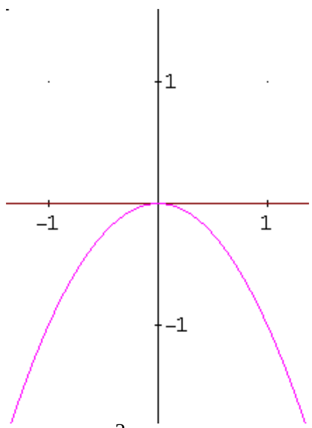

Wenn wir sicher sein wollen, dass eine Funktion an einer Stelle nicht nur eine waagerechte Tangente sondern auch ein Extremum hat, untersuchen wir die Steigungen rechts und links von dieser Stelle. ***Ändert sich die Steigung von monoton steigend zu monoton fallend, dann liegt an dieser Stelle ein Hochpunkt, findet ein Wechsel von monoton fallend nach monoton steigend statt, liegt ein Tiefpunkt vor.***

Beispiele:
Blickrichtung: von links nach rechts




$f(x) = x^2$ hat an der Stelle 0 einen Tiefpunkt, es findet ein Wechsel von streng monoton fallend zu streng monoton steigend statt, dies zeigt sich im Wechsel von negativen zu positiven Funktionswerten von f'
kurz:

| links von 0 | | rechts von 0 |
|---|---|---|
| für x < 0 | | für x > 0 |
| f'(x) < 0 | f'(0) = 0 | f'(x) > 0 |




$f(x) = -x^2$ hat an der Stelle 0 einen Hochpunkt, es findet ein Wechsel von streng monoton steigend zu streng monoton fallend statt, dies zeigt sich im Wechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f'
kurz:

| links von 0 | | rechts von 0 |
|---|---|---|
| für x < 0 | | für x > 0 |
| f'(x) > 0 | f'(0) = 0 | f'(x) < 0 |

## Aufgabe 1:

Untersuchen Sie die Funktion f mit f(x) = 1/8 $x^3$ – 9/8 $x^2$ + 15/8 x + 17/8 unter Verwendung des Vorzeichenwechselkriteriums auf Extrema und Wendepunkte.

*Lösung:*
***Extrema***
Notwendige Bedingung: f'(x) = 0
f'(x) = 3/8 $x^2$ – 9/4 x + 15/8

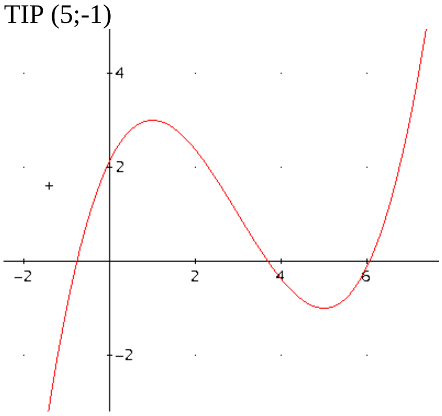
3/8 $x^2$ – 9/4 x + 15/8 = 0
Lösung mittels pq-Formel oder quadratischer Ergänzung (Achtung: Gleichung vorher mit 8/3 multiplizieren, damit der Vorfaktor von $x^2$ 1 ist!)
Überprüfung mit dem TR:
Eingabe:
MODE 5 – 3
3 Bruchtaste 8 =
-9 Bruchtaste 4 =
15 Bruchtaste 8 =
= liefert $x_1$ = 5
= liefert $x_2$ = 1

*Überprüfung der möglichen Extremstellen 1 und 5 mit dem Vorzeichenwechselkriterium*

Hinreichende Bedingung: Monotoniewechsel von f, d.h. Vorzeichenwechsel der 1. Ableitungsfunktion und f'(x) = 0
Berechnung der Steigung links und rechts der Stelle 1 durch Einsetzen von konkreten Werten in die 1. Ableitungsfunktion mit Hilfe des TR:
MODE 7
Bruchstrich 3 Cursor 8 Cursor ALPHA ) $x^2$-Taste - Bruchstrich 9 Cursor 4 Cursor ALPHA ) + Bruch 15 Cursor 8 =
START 0 =
END 6 =
STEP 0.5 =
(Die Schrittweite muss ggf. kleinschrittiger gewählt werden, wenn die möglichen Extremstellen zu nahe beieinander liegen)

Aus der entstandenen Wertetabelle lässt sich ablesen,
dass links von 1 eine positive und rechts von 1 eine negative Steigung vorliegt,
d.h. an der Stelle 1 wechselt das Monotonieverhalten von f von steigend nach fallend,
d.h. an 1 hat f ein Maximum
an der Stelle 5 wechselt das Monotonieverhalten von fallend nach steigend, da
f'(4,5 ) = - 0,656 und f'(5,5) = 0,8437 ist,
d.h. an der Stelle 5 hat f ein Minimum

Berechnung der y-Koordinaten der Extrema mittels Wertetabelle für f liefert
HOP (1; 3)
TIP (5;-1)



***Wendepunkte***
Notwendige Bedingung: f''(x) = 0, d.h. f' hat an dieser Stelle ein Extremum
f''(x) = ¾ x – 9/4

¾ x – 9/4 = 0 liefert x = 3 als mögliche Wendestelle

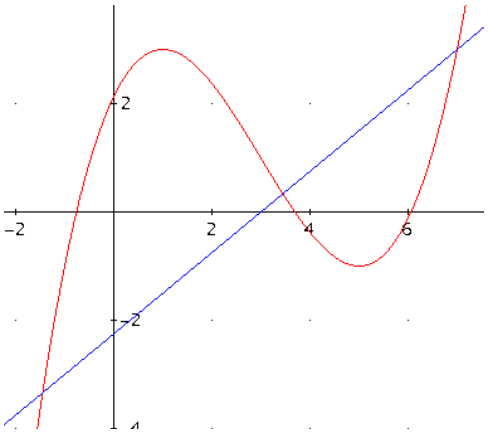
*Überprüfung der möglichen Wendestelle 3 mit dem Vorzeichenwechselkriterium*

Hinreichende Bedingung: Extremum der 1. Ableitungsfunktion f', d.h. Vorzeichenwechsel von f'' und f''(x) = 0

Berechnung der Steigung links und rechts der Stelle 3 durch Einsetzen von konkreten Werten in die 2. Ableitungsfunktion mit Hilfe des TR:
MODE 7
Bruchstrich 3 Cursor 4 Cursor ALPHA ) - Bruchstrich 9 Cursor 4 Cursor =
START 2 =
END 4 =
STEP 0.5 =

Liefert: f''(2,5) = -0,375 < 0 und f''(3,5) = 0,375 > 0
Also liegt ein Vorzeichenwechsel der 2. Ableitungsfunktion an der Stelle 3 vor, somit ist 3 eine Wendestelle und f(3) = 1 ist die zugehörige y-Koordinate des Wendepunktes

Graphen von f und f''




Achtung:
die 2. Ableitungsfunktion ist eine lineare Funktion mit positiver Steigung,
aber an der Stelle x = 3 wechseln die Funktionswerte von f '' ihr Vorzeichen von - nach +,
d.h. links von 3 sind die Funktionswerte von f '' negativ und rechts davon positiv,
die Steigung der 2. Ableitungsfunktion ist f '''(x) = ¾, also immer positiv