Lösungen Aufgabe GK

Zur Lösung des Problems müssen die Studierenden erkennen, dass die Seitenlängen des Quadrats der Marmorpyramide zu ermitteln sind . Dazu müssen sie die Koordinaten der Basispunkte A', B', C' und D' berechnen. Sie liegen auf den Geraden AS, BS, CS und DS; das Aufstellen der Parametergleichung einer Geraden im R3, die durch zwei Punkte gegeben ist, gehört zu den Standardverfahren der analytischen Geometrie:

$$g_1 : \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Die in der Zeichnung eingetragene Höhe der Marmorpyramide liefert die x_3 - Koordinate - 1,5 .
Also gilt für A': $-1,5 = 10 * \lambda \Leftrightarrow \lambda = -0,15 \Rightarrow A'(-1,5 \mid 1,5 \mid -1,5)$
Die übrigen Punktkoordinaten erhält man mit Hilfe der Überlegung, dass A'B'C'D' ein Quadrat ist, dessen Mittelpunkt der Punkt O'(0/0/-1,5) ist. Natürlich kann auch das unter a) angewandte Verfahren für die entsprechenden Geraden benutzt werden. Im Unterricht wurde immer wieder betont, dass man auch häufig mit elementaren Mitteln schneller und eleganter zu einer Lösung kommt.
Die weiteren Punkte lauten:
B'(-1,5 / -1,5 / -1,5) ; C'(1,5 / -1,5 / -1,5); D'(1,5 / 1,5 / -1,5) .
Die Berechnung der Länge der Quadratseiten kann unter Anwendung des Skalarproduktes oder begründeter geometrischer Überlegung erfolgen.
Die Grundflächen sind Quadrate: $V_{gr} = \frac{1}{3} * 20^2 * 10 = \frac{4000}{3}$ und $V_{kl} = \frac{1}{3} * 3^2 * \frac{3}{2} = 4,5.$
Die Volumina betragen also 1333,33 m^3 und 4,5 m^3 . Das Verhältnis beträgt $\frac{8000}{27} \approx \frac{296}{1}$

b) Die Berechnung der Dreiecksflächen kann auf verschiedene Weisen erfolgen. Studierende des GKs sollten die Symmetrie der Dreieckflächen ausnutzen und argumentieren, dass die Höhe einer Dreiecksseite in einem gleichschenkligen Dreieck gleich der Entfernung der Mitte einer Kante des Grundflächenquadrates zu S ist. Alternativ dazu kann die Strategie des Lotfußpunktverfahrens genutzt werden, wobei die Studierenden des GKs die Anwendung des Verfahrens wenig geübt haben, d.h. sie würden diese Lösungsstrategie selber entwickeln. Über das arithmetische Mittel der Streckenendpunktskoordinaten erhält man etwa für M_{AB} (10 / 0 / 10). Die Dreieckshöhe ist dann gleich der Länge des Ortsvektors zu diesem Punkt, also $10 * \sqrt{2}$.
Für die Oberfläche gilt somit: $A_P = 4 * \frac{1}{2} * 20 * 10 * \sqrt{2} + 20 * 20 = 400 * (1 + \sqrt{2}) \approx 965,7$ (in m^2) Die Reinigungskosten betragen also 1207,11 €.

c) Die Studierenden des GK müssen aus dem Aufgabentext die mathematische Problemstellung: Schnittpunkt von Gerade und Ebene und Entfernung zwischen 2 Punkten erkennen.
Das Aufstellen von Koordinatengleichungen wurde an vielen Beispielen im Unterricht behandelt.
Die vereinfachten Richtungsvektoren der gesuchten Ebene lauten: $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

man erhält das Gleichungssystem
(I) $n_1 - n_2 + n_3 = 0$
(II) $- n_1 - n_2 + n_3 = 0$,
welches als eine mögliche Lösung $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ und $n_3 = 1$ hat.
Also lautet die Koordinatengleichung : E : $x_2 + x_3 = 0$, da O=S in E liegt.
Die Gerade g durch P und G hat die Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$
Setzt man g in E ein, erhält man $\lambda = \frac{1}{3}$. Also lautet der Durchstoßpunkt Q(-4 / 6 / -6) .

Die Entfernung zwischen P und Q wird mit Hilfe des Skalarprodukts berechnet:

$$d = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+9+4} = 4,1\text{m} = 410 \text{ cm}$$

Also braucht der Bohrroboter für die Strecke von P bis zum Durchstoßpunkt der Pyramidenfläche ca. eine Viertelstunde (exakt: 13,6 Min.).

d) Man bildet das Skalarprodukt des Richtungsvektors von g mit dem vereinfachten Normalenvektor von E .

$$\cos(\alpha') = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} * \sqrt{17}} \Rightarrow \alpha' \approx 30,96^o \;\Rightarrow \alpha \approx 59,04^o \,.$$

Auf die von der Winkelberechnung zwischen 2 Geraden abweichende Berechnung wurde exemplarisch hingewiesen.

e) Die Bestimmung des Abstandes eines Punktes zu einer Ebene mit Hilfe der Hesseschen Normalenform wurde im Unterricht behandelt.

Es gilt: $d = \frac{x_2+x_3}{\sqrt{2}}$, wobei x_2 und x_3 die Koordinaten des jeweiligen Punktes sind.

Man erhält: $d \approx 3,54$ (in m) .

Der Schwerpunkt dieser Aufgabe liegt in dem Erkennen und Ausnutzen geometrischer Sachverhalte und vor allem in der mathematischen Modellierung und Argumentation. Insgesamt erfordert die Lösung der Aufgaben eine gute begriffliche Durchdringung des gelernten Stoffes und eine schlüssige Darstellung. Das Bestimmen fehlender Größen, z.B. Punktkoordinaten aus einer Skizze wurde exemplarisch besprochen. Eine gute Leistung Erfordert das begründete Akufzeigen von Modellen und Lösungsstrategien für alle Teilaufgaben. Bei der Lösung sind Fehlleistungen möglich.
Eine ausreichende Leistung beinhaltet Ideen zu Ansätzen und die Anwendung einfacher Kalküle, wie Aufstellen von Ebenengleichungen, Längen- und Abstandsberechnungen.