Bergische Universität Wuppertal
Wintersemester 2007/2008
Veranstaltung: „Medienpraktikum“
Dozenten: Frau Winter/ Herr Schwebinghaus

Ausarbeitung zum Projekt :

“Einsatz eines Computer Algebra Systems (Derive) in der Sekundarstufe II “

Verfasser:

Felix Freitag
531069
Gym/Ge
5. Semester
felixfreitag@gmx.net

Cornelia Swora
524378
Gym/Ge
5.Semester
cornelia@delfs-swora.de

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Dieses Projekt beschäftigt sich mit dem Einsatz des Computer Algebra Systems Derive im Mathematikunterricht der Oberstufe. Wir verwenden Derive in diesem Projekt primär als Werkzeug, um größere Gleichungssysteme schnell und fehlerlos zu berechnen. Dadurch verschiebt sich der Fokus des Unterrichts auf die Modellierung. Im Vordergrund dieser Reihe stehen demnach auch nicht die Rechnungen an sich, sondern die Herangehensweise an ein reales Problem.
Des weiteren wird die Möglichkeit der graphischen Darstellung durch Derive genutzt, um die Ergebnisse zu überprüfen und festzustellen, ob die unterschiedlichen Modellierungen vergleichbar sind.

2. Didaktische Reflektion

2.1 Voraussetzungen

Das Projekt ist geplant für einen Mathematikleistungskurs im zweiten Halbjahr des zwölften Schuljahres an einem Gymnasium in Wuppertal.
Der Kurs besteht aus 24 Schülerinnen und Schülern. Die Schülerinnen und Schüler haben bereits mit dem Computer Algebra System Derive gearbeitet und sind mit dessen Funktionen vertraut. Das Projekt findet im Rahmen der Integralrechnung statt. Zuvor hatten die Schülerinnen und Schüler bereits Steckbriefaufgaben sowie das Lösen linearer Gleichungssysteme gelernt.

2.2 Ziel

Die Schülerinnen und Schüler sollen durch dieses Projekt eine praktische Anwendung der Integralrechnung kennen lernen. Die Formel für die Berechnung der Länge eines Funktionsgraphen soll selbstständig erarbeitet werden. Zudem soll die Benutzung des CAS Derive vertieft werden. Das Projekt bietet des weiteren die Möglichkeit verschiedene mathematische Themengebiete und Inhalte zu verknüpfen. Frühere Inhalte werden dadurch wiederholt und in einen neuen Sachzusammenhang gestellt.
Die Schülerinnen und Schüler sollen zudem lernen praktisch gegebene Probleme in einen mathematischen Zusammenhang zu übersetzen.

2.3 Die Gruppeneinteilung

Wenn sich in der Klasse erfahrungsgemäß relativ homogene Dreier- oder Zweiergruppen bilden, sollte die Wahl der Partnerin oder des Partners den Schülerinnen und Schülern überlassen werden. Durch die freiwillige Gruppenbildung wird eine höhere Motivation zur Zusammenarbeit unter den Schülerinnen und Schülern erwartet.
Ist dies nicht der Fall, so sollte die Klasse durch den Lehrer in Zweier- oder Dreiergruppen eingeteilt werden, so dass möglichst gleichstarke Schülerinnen und Schüler zusammen arbeiten.
Die Partner sollen möglichst leistungshomogen sein, damit sie gemeinsam einen Lösungsweg erarbeiten können, der ihrem Leistungsvermögen entspricht und nicht ein schwacher Schüler oder eine schwache Schülerin von einer/einem starken Schülerin/Schüler von der Arbeit ausgegrenzt wird. Beziehungsweise eine leistungsstarke Schülerin oder ein leistungsstarker Schüler durch die Zusammenarbeit mit einem schwächeren Schüler oder einer schwächeren Schülerin unterfordert wird.
Zudem erwarten wir eine höhere Motivation bei den Schülerinnen und Schülern, wenn sie auf einem annährend gleichen Niveau arbeiten.

3. Vorgehen

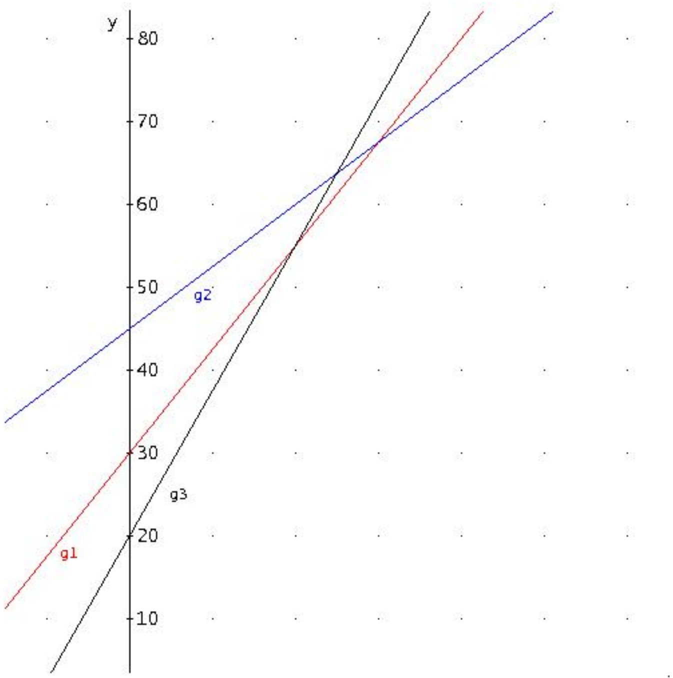
Die Klasse erhält das Arbeitsblatt „Projekt“ und teilt sich in die Kleingruppen ein beziehungsweise wird in diese eingeteilt. Jede Gruppe erhält die Datei mit den Luftbildern des Abschnittes der Wuppertaler-Schwebebahn, über die bereits ein Koordinatensystem gelegt ist.
Im Folgenden arbeiten die Kleingruppen selbstständig mit Derive. Unbekannte Inhalte beziehungsweise Inhalte, die wiederholt werden müssen, sollen eigenständig mit Hilfe des Buches oder anderer Quellen erarbeitet werden.
Der Lehrer oder die Lehrerin steht für konkrete Fragen sowie für Hilfen zur Verfügung.
Nach der Erarbeitung werden die verschiedenen Ergebnisse präsentiert.
Dies erfolgt nach dem Prinzip des Galeriegangs. Ein Mitglied der Kleingruppe bleibt am Computer der Gruppe und stellt die Ergebnisse vor, während die anderen Gruppenmitglieder jeweils zur nächsten Gruppe wechseln. Der jenige, der das Ergebnis vorstellt wechselt dabei nach jeder Präsentation, so dass alle Mitglieder präsentiert haben und andere Ergebnisse gesehen haben. Am Ende tauschen sich die Mitglieder der Kleingruppe über die Ergebnisse und Präsentationen der anderen Gruppen aus.

Die Präsentation erfolgt, wie die Erarbeitung auch, im Computerraum. Die Kleingruppen sollen ihre Ergebnisse, die Vorgehensweise in ihrer Gruppe sowie möglicherweise aufgetretene Schwierigkeiten vorstellen. Eine knappe Skizze der Vorgehensweise sowie das Ergebnis sollten mit dem Computer präsentiert werden, um die Arbeit der einzelnen Teams auch längerfristig zu würdigen. Als Grundlage für die Präsentation sollte die Derive Datei mit dem Lösungsweg sowie falls es der Lösungsweg hergibt eine Graphik, in welcher der Graph der approximierenden Funktion über den Streckenabschnitt gelegt wurde, dienen.
Das Projekt wird in einem Unterrichtsgespräch abschließend besprochen. Dabei sollte sich die Klasse auf möglichst eine Präsentation einigen, die sowohl inhaltlich als auch optisch besonders überzeugend war. Diese wird als Ergebnissicherung für den gesamten Kurs ausgedruckt und kopiert. Bei bedarf kann sie an einigen Stellen durch die Lehrerin oder den Lehrer ergänzt werden.

4. Lösungswege

4.1 Aufstellung der Kostenfunktionen

Zunächst werden aus den Daten zu den drei Firmen Kostenfunktionen aufgestellt. Um die Darstellung im Koordinatensystem zu vereinfachen stellen die Geraden den Preis pro 100 Meter dar. Es ergeben sich für Die Firma A die Gerade $g_1 = 30 + 2,5 \cdot x$, für die Firma B die Gerade $g_2 = 45 + 1,5 \cdot x$ und für die Firma C die Gerade $g_3 = 20 + 3,5 \cdot x$.
In einem 2-D-Graphikfenster lässt man Derive die drei Geraden einzeichnen.



Nun berechnet man die Schnittpunkte der Geraden g_3 und g_1 sowie der Geraden g_1 und g_2.

g_1 und g_3 schneiden sich bei x=10, g_1 und g_2 bei x=15.

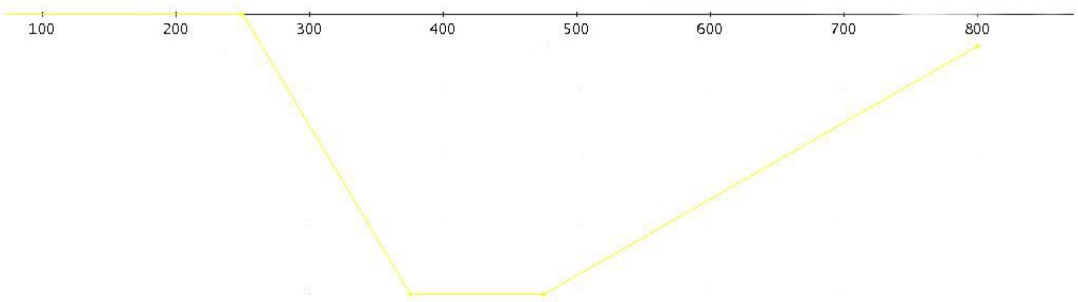
Aus den Schnittpunkten und der Zeichnung der Geraden kann man nun Schlussfolgern, dass für eine Länge unterhalb von 1000 Metern die Firma C, für eine Länge zwischen 1000 und 1500 Metern die Firma A und ab einer Länge von 1500 Metern die Firma B das günstigste Angebot macht. Diese Vorüberlegungen sind für beide nachfolgenden Lösungswege hinzuzuziehen.

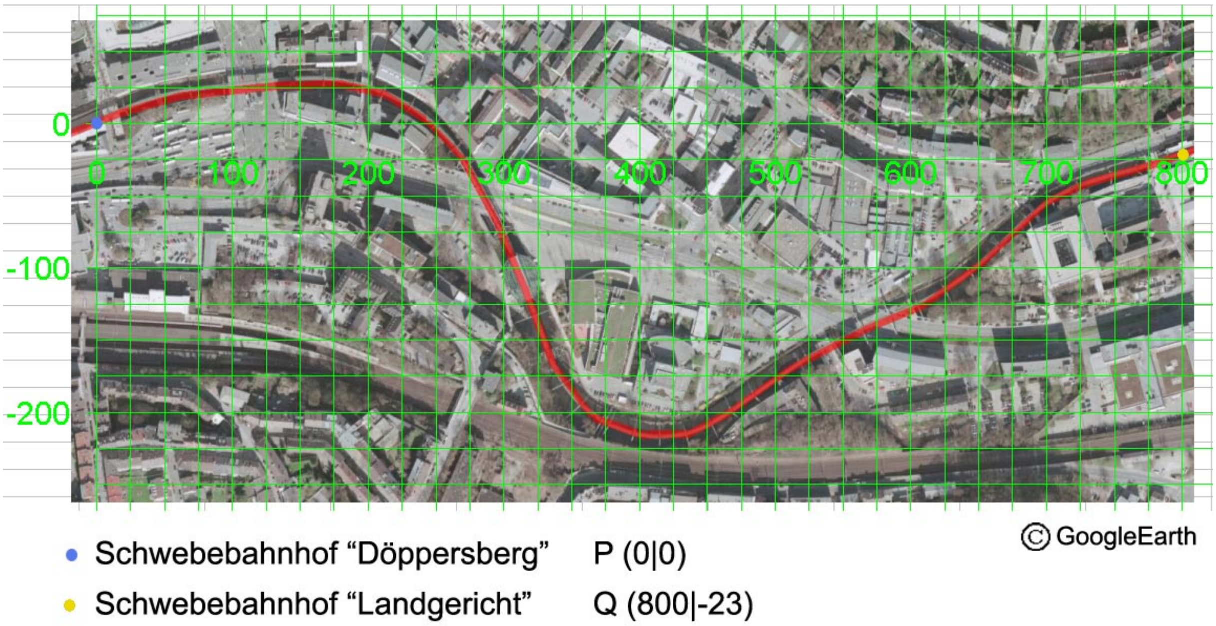
4.2 Erster Lösungsweg – Approximation über Strecken

Für die Strecke zwischen „Alter Markt“ und „Werther Brücke“ lässt sich anhand des Bildes schnell sagen, dass sie kürzer als 1000 Meter ist. Folglich ist hier das Angebot der Firma C das Beste.

Für die Strecke zwischen „Döppersberg“ und „Landgericht“ lässt sich ebenso schnell abschätzen, dass sie kürzer als 1500 Meter ist, es kommen also nur die Firmen A und C als Lösung in Frage. Um dies besser Einschätzen zu können, erfolgt eine grobe Approximation der Strecke durch Geradenstücke.

Die Punkte P1:=(0,0), P2:=(250,0), P3:=(375,-200), P4:=(475,-200), P5:=(800,-23) werden grob abgelesen. Eingezeichnet und Verbunden ergibt sich der folgende Streckenverlauf.





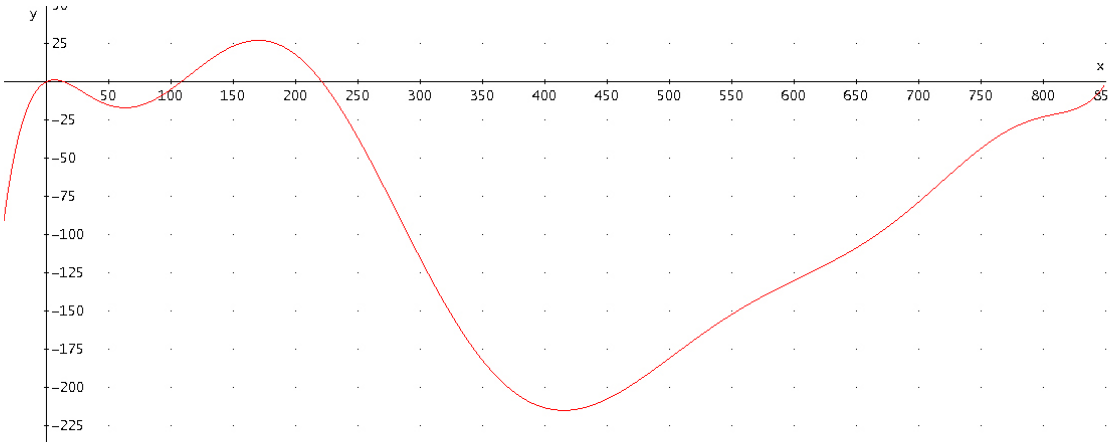
Das Ergebnis von circa 956 Metern liegt unterhalb der 1000 Meter Grenze, die Strecke ist also eher kürzer als 1000 Meter, man entscheidet sich daher auch hier für das Angebot der Firma C.
An dieser Stelle wird jedoch auch deutlich, dass eine exaktere Approximation günstiger, wäre, da das Ergebnis nahe an der bedeutsamen 1000 Meter-Schwelle liegt und mit relativ vielen Ungenauigkeiten belastet ist.

4.3 Zweiter Lösungsweg – Approximation mit Polynomen

Auch hier kann man zunächst wieder davon ausgehen, dass die Strecke „Alter Markt“ bis „Werther Brücke“ von Firma C am günstigsten realisiert werden kann. Daher soll auch hier nur auf die Berechnung der Strecke zwischen „Döppersberg“ und „Landgericht“ eingegangen werden. (Eine Berechnung für den ersten Abschnitt findet sich im Anhang unter 5.3)

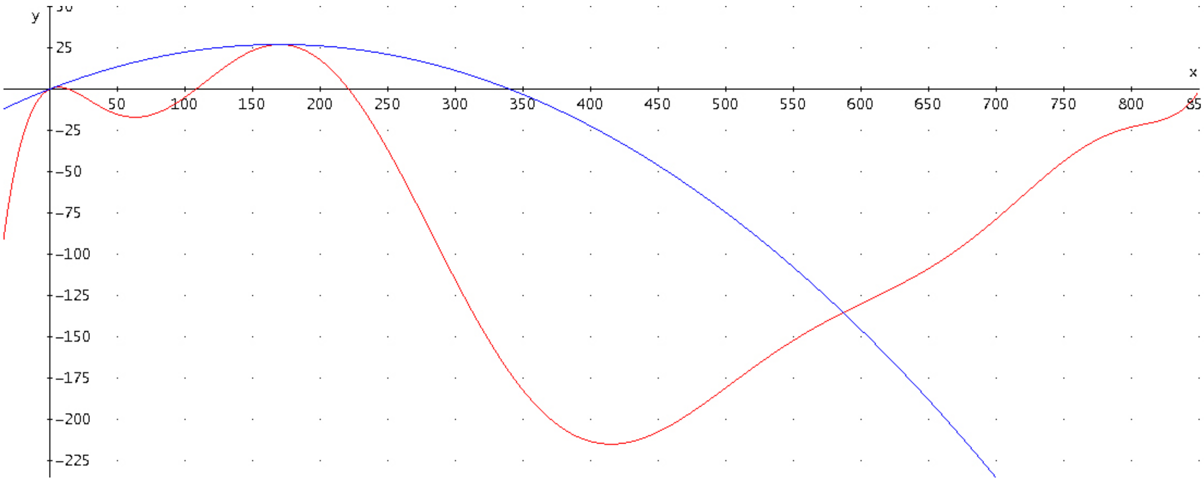
Zunächst werden wieder Punkte in der Grafik abgelesen. Zusätzlich sollen auch die Steigungen der jeweiligen Punkte abgeschätzt werden. Als geeignete Punkte erscheinen $P_1(0,0)$, $P_2(170,27)$, $P_3(415,-215)$, $P_4(600,-130)$ und $P_5(800,-23)$ mit den Steigungen $m_1=m_4=0,4$ sowie $m_2=m_3=0$ und $m_5=0,2$. Somit hat man zehn zu berücksichtigende Eigenschaften, weswegen ein ganzrationales Polynom 9. Grades als Ausgangsfunktion ausgewählt wird. Mittels Derive lässt sich relativ schnell die Lösung ermitteln (siehe hierzu auch 5.2).

Nachdem man die somit entstandene Funktion graphisch darstellen lässt, erkennt man sehr schnell, dass diese für den Bereich von P_2 bis P_5 eine gute Approximation darstellt, für den Abschnitt zwischen P1 und P2 jedoch nicht.



Dieses Problem wird mithilfe einer zweiten Funktion behoben. Die Wahl fällt angesichts des offensichtlichen Streckenverlaufs dabei auf eine umgedrehte Parabel mit Hochpunkt in P_2, die auch durch P_1 verläuft. Diese lässt sich relativ schnell bestimmen:

$$-\frac{27}{170^2}\cdot(x-170)^2+27$$



Mit der den Schülern bereits bekannten Formel für die Berechnung der Längen von Funktionsgraphen werden nun die Längen der beiden Teilabschnitte berechnet.

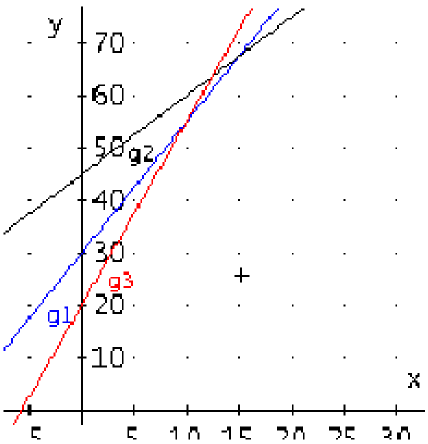
$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Als Ergebnis erhält man etwa 964 Meter, was unter der 1000-Meter-Schwelle liegt, weshalb man sich auch hier für Firma C entscheiden sollte.

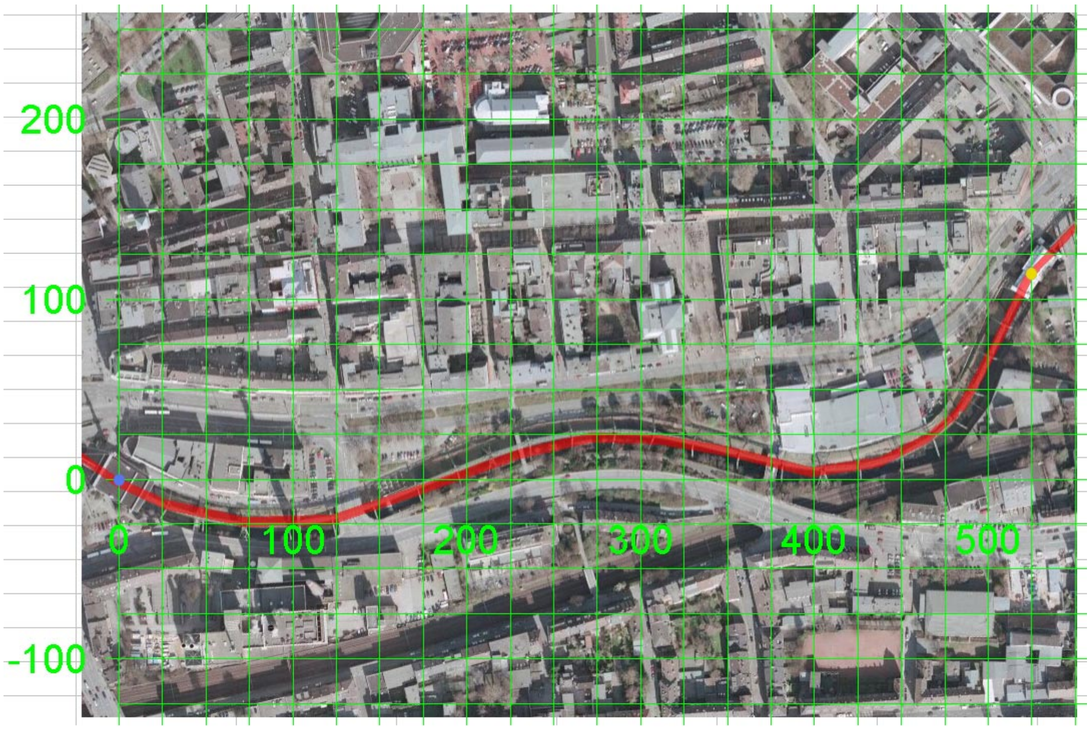
5. Anhang

5.1 Derive zum ersten Lösungsweg

```
#1:   g1 := 30 + 2.5·x
#2:   g2 := 45 + 1.5·x
#3:   g3 := 20 + 3.5·x
#4:   g1 = g2
#5:   SOLVE(g1 = g2, x)
#6:                                   x = 15
#7:   g1 = g3
#8:   SOLVE(g1 = g3, x)
#9:                                   x = 10
```



Auf dem Intervall von 0 bis 1000 Meter ist Firma C am günstigsten.
Auf dem Intervall von 1000 Metern bis 1500 Metern ist Firma A am günstigsten.
Für über 1500 Meter ist die Firma B am günstigsten.



• Schwebebahnhof "Alter Markt" P (0|0)
• Schwebebahnhof "Werther Brücke" Q (525|116)

Die Strecke Schwebebahnhof „Alter Markt“ bis Schwebebahnhof „Werther Brücke“ ist deutlich kürzer als 1000 Meter. Demnach ist für diese Strecke das Angebot der Firma C am günstigsten.

• Schwebebahnhof "Döppersberg" P (0|0)
• Schwebebahnhof "Landgericht" Q (800|-23)

Die Strecke ist deutlich kürzer als 1500 Meter (200+800+200=1400)

#10: P1 := [0, 0]

#11: P2 := [250, 0]

#12: P3 := [375, -200]

#13: P4 := [475, -200]

#14: P5 := [800, -23]

#15: $P1P2 := \sqrt{(250^2)}$

#16: $P2P3 := \sqrt{((375 - 250)^2 + (-200)^2)}$

#17: $P3P4 := \sqrt{((475 - 375)^2 + (-200 + 200)^2)}$

#18: $P4P5 := \sqrt{((800 - 475)^2 + (-23 + 200)^2)}$

#19: P1P2 := 250

#20: $P2P3 := 25\cdot\sqrt{89}$

#21: P3P4 := 100

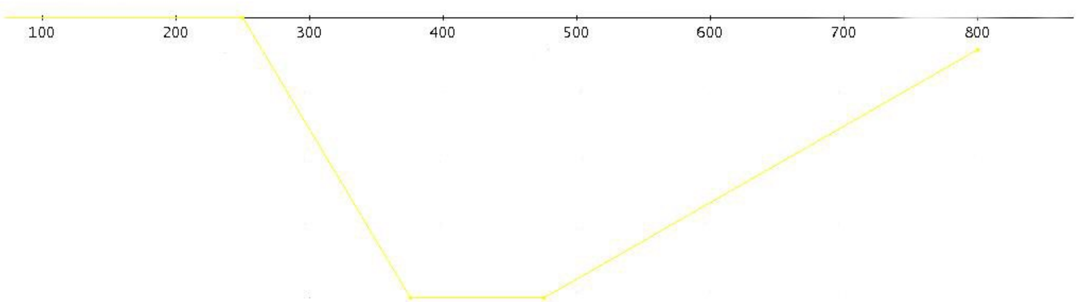
#22: $P4P5 := \sqrt{136954}$

#23: P1P2 + P2P3 + P3P4 + P4P5

#24: $\sqrt{136954} + 25\cdot\sqrt{89} + 350$

#25: 955.922494

Die Strecke ist somit eher kürzer als 1000 Meter demnach ist das Angebot der Firma C das günstigste.



5.2 Derive zum zweiten Lösungsweg

#1: $f(x) := a\cdot x^9 + b\cdot x^8 + c\cdot x^7 + d\cdot x^6 + e\cdot x^5 + g\cdot x^4 + h\cdot x^3 + i\cdot x^2 + j\cdot x + k$

#2: $\frac{d}{dx} f(x)$

#3: $f1(x) := 9\cdot a\cdot x^8 + 8\cdot b\cdot x^7 + 7\cdot c\cdot x^6 + 6\cdot d\cdot x^5 + 5\cdot e\cdot x^4 + 4\cdot g\cdot x^3 + 3\cdot h\cdot x^2 + 2\cdot i\cdot x + j$

#4: SOLVE(f(0) = 0 ∧ f(800) = –23 ∧ f(170) = 27 ∧ f(415) = –215 ∧ f(600) = –130 ∧ f1(170) = 0 ∧ f1(415) = 0 ∧ f1(600) = 0.4 ∧ f1(0) = 0.4 ∧ f1(800) = 0.2, {a, b, c, d, e, g, h, i, j, k})

#5: $a = 6.239598247\cdot 10^{-21} \wedge b = -2.456829309\cdot 10^{-17} \wedge c = 4.008146373\cdot 10^{-14} \wedge d = -3.483507987\cdot 10^{-11} \wedge e = 1.720757592\cdot 10^{-8} \wedge g = -4.743349956\cdot 10^{-6} \wedge h = 0.0006607643451 \wedge i = -0.0372356028 \wedge j = 0.4 \wedge k = 0$

#6: $t(x) := 6.239598247\cdot 10^{-21}\cdot x^9 - 2.456829309\cdot 10^{-17}\cdot x^8 + 4.008146373\cdot 10^{-14}\cdot x^7 - 3.483507986\cdot 10^{-11}\cdot x^6 + 1.720757592\cdot 10^{-8}\cdot x^5 - 4.743349955\cdot 10^{-6}\cdot x^4 + 0.000660764345\cdot x^3 - 0.0372356028\cdot x^2 + 0.4\cdot x$

#7: $\frac{d}{dx} t(x)$

#8: $t1(x) := 5.615638422\cdot 10^{-20}\cdot x^8 - 1.965463447\cdot 10^{-16}\cdot x^7 + 2.805702461\cdot 10^{-13}\cdot x^6 - 2.090104792\cdot 10^{-10}\cdot x^5 + 8.60378796\cdot 10^{-8}\cdot x^4 - 1.897339982\cdot 10^{-5}\cdot x^3 + 0.001982293035\cdot x^2 - 0.0744712056\cdot x + 0.4$

#9: $\int_{170}^{800} \sqrt{(1 + t1(x)^2)}\, dx$

#10: 791.2698126

#11: $u(x) := -\frac{27}{170^2}\cdot(x - 170)^2 + 27$

#12: $\frac{d}{dx} u(x)$

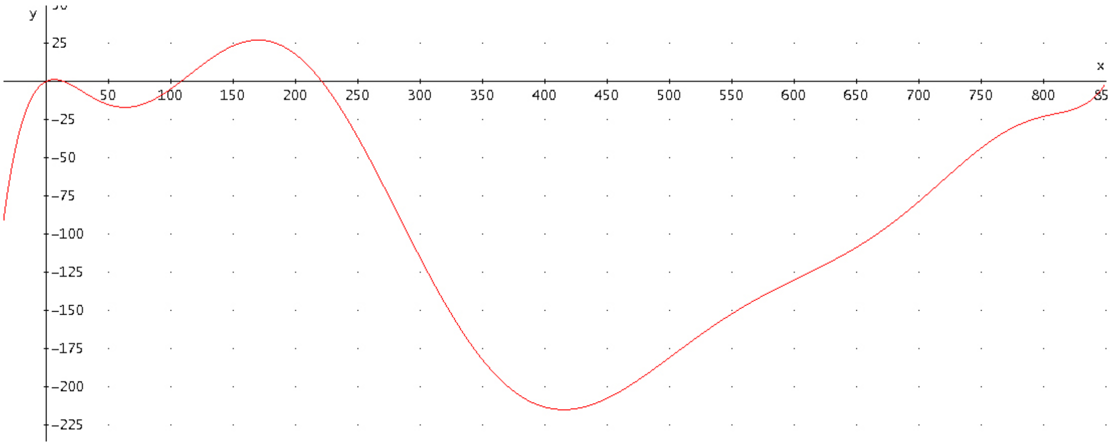
#13: $u1(x) := 0.00186851211\cdot(170 - x)$

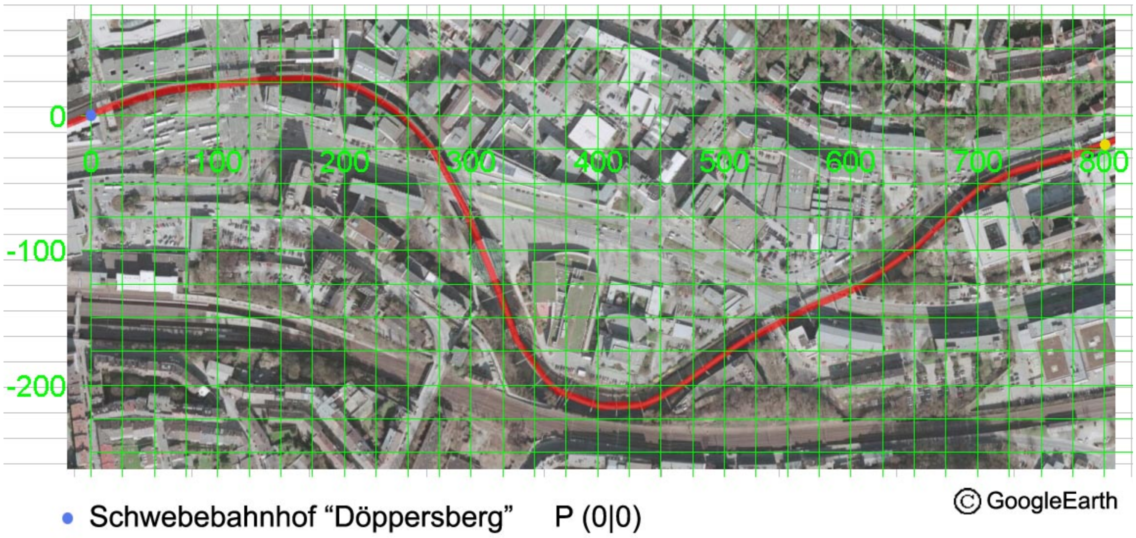
#14: $\int_{0}^{170} \sqrt{(1 + u1(x)^2)}\, dx$

#15: 172.8170422

#16: 791.2698126 + 172.8170422

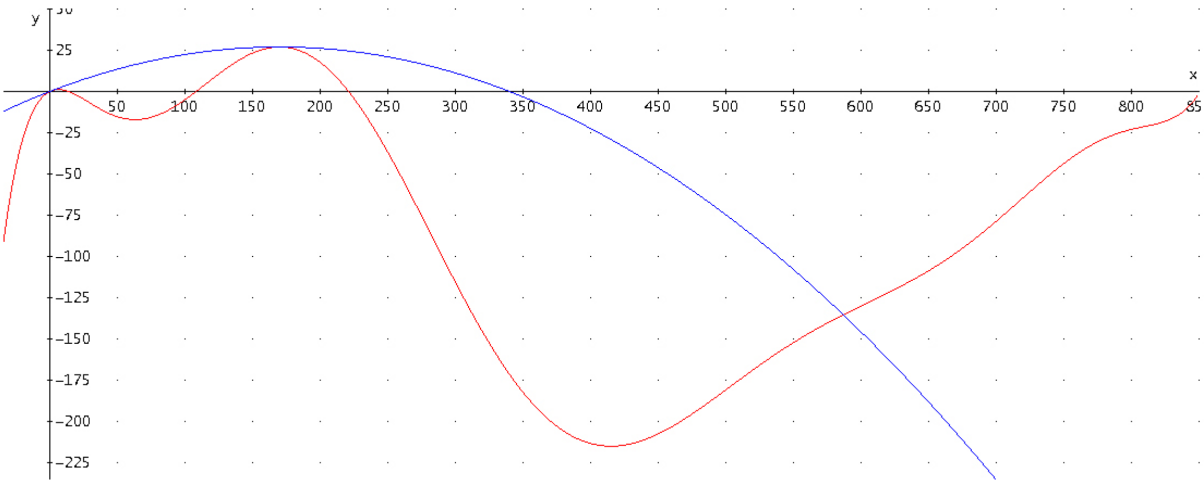
#17: 964.0868547





- Schwebebahnhof “Döppersberg” P (0|0)
- Schwebebahnhof “Landgericht” Q (800|-23)

Nach der graphischen Darstellung der Funktion t(x) erkennt man, dass im Bereich zwischen $P_1(0,0)$ und $P_2(170,27)$ diese keine gute Approximation für den Verlauf der Strecke darstellt. Dieser Bereich wird daher mit einer einfachen Parabel erneut modelliert. Im Anschluss erfolgt die Berechnung der Streckenintegrale und man erhält somit als Summe eine Länge von 964m. Man sollte sich also für Firma C entscheiden.



5.3 Berechnung der Strecke „Alter Markt“ - „Werther Brücke“ mithilfe von Polynomen

In der Realität ist es häufig so, dass der Kämmerer der Stadt bereits vorher eine Kostenstelle für die Sanierung angeben muss. Daher ist auch eine nähere Bezifferung der zu erwartenden Gesamtkosten notwendig. Hierfür ist es also notwendig auch die Länge der Strecke zwischen „Alter Markt“ und „Werther Brücke“ zu berechnen. Im Folgenden wird diese daher mit einem geeigneten Polynom approximiert.

Das Verfahren zur Berechnung verläuft dabei genau wie in Abschnitt 4.3. Es werden daher die Punkte $P_1(0,0)$, $P_2(90,-25)$, $P_3(280,24)$, $P_4(402,6)$ und $P_5(525,116)$ gewählt. Bei P_2, P_3 und P_4 ist die Steigung dabei gleich 0, bei P_1 etwa -0,5 und bei P_5 etwa 1,3.

#1: $f(x) := a \cdot x^9 + b \cdot x^8 + c \cdot x^7 + d \cdot x^6 + e \cdot x^5 + g \cdot x^4 + h \cdot x^3 + i \cdot x^2 + j \cdot x + k$

#2: $\frac{d}{dx} f(x)$

#3: $f1(x) := 9 \cdot a \cdot x^8 + 8 \cdot b \cdot x^7 + 7 \cdot c \cdot x^6 + 6 \cdot d \cdot x^5 + 5 \cdot e \cdot x^4 + 4 \cdot g \cdot x^3 + 3 \cdot h \cdot x^2 + 2 \cdot i \cdot x + j$

#4: SOLVE(f(0) = 0 ∧ f(525) = 116 ∧ f(90) = −25 ∧ f(280) = 24 ∧ f(402) = 6 ∧ f1(90) = 0 ∧ f1(280) = 0 ∧ f1(402) = 0 ∧ f1(0) = −0.5 ∧ f1(525) = 1.3, {a, b, c, d, e, g, h, i, j, k})

#5: $a = -2.158063336 \cdot 10^{-20} \wedge b = 4.791780733 \cdot 10^{-17} \wedge c = -4.457585844 \cdot 10^{-14} \wedge d = 2.223214181 \cdot 10^{-11} \wedge e = -6.186352538 \cdot 10^{-9} \wedge g = 8.864994552 \cdot 10^{-7} \wedge h = -5.42060572 \cdot 10^{-5} \wedge i = 0.003457018232 \wedge j = -0.5 \wedge k = 0$

#6: $t(x) := -2.158063336 \cdot 10^{-20} \cdot x^9 + 4.791780733 \cdot 10^{-17} \cdot x^8 - 4.457585844 \cdot 10^{-14} \cdot x^7 + 2.22321418 \cdot 10^{-11} \cdot x^6 - 6.186352538 \cdot 10^{-9} \cdot x^5 + 8.864994551 \cdot 10^{-7} \cdot x^4 - 5.42060572 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + 0.003457018231 \cdot x^2 - 0.5 \cdot x$

#7: $\frac{d}{dx} t(x)$

#8: $t1(x) := -1.942257002 \cdot 10^{-19} \cdot x^8 + 3.833424586 \cdot 10^{-16} \cdot x^7 - 3.12031009 \cdot 10^{-13} \cdot x^6 + 1.333928507 \cdot 10^{-10} \cdot x^5 - 3.093176269 \cdot 10^{-8} \cdot x^4 + 3.54599782 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 - 0.0001626181716 \cdot x^2 + 0.006914036461 \cdot x - 0.5$

#9: $\int_0^{525} \sqrt{(1 + t1(x)^2)}\, dx$

#10: 588.3502769

Offensichtlich (vergleiche hierzu die beiden Grafiken auf der nachfolgenden Seite) erhält man mit dem Polynom t(x) eine sehr gute Approximation für die Strecke, so dass man sofort das Streckenintegral zwischen 0 und 525 berechnen kann.

Bei einer Aufrundung auf 600m (für den Haushalt ist es wohl erstmal besser etwas zuviel Geld einzuplanen, als zu wenig) und Hinzuziehung der anderen (ebenfalls aufgerundeten) Strecke von 1000m, erhält man Gesamtkosten von 9600€.